ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ
(әдістемелік құрал)

1. ОҚИҒАЛАР АРАСЫНДАҒЫ ҚАТЫСТАР МЕН АМАЛДАР.

Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарының бірі-оқиға.

Сынау кезінде қандай да бір шарттың орындалу немесе орындалмау нәтижесі *оқиға* деп аталады.

A және B оқиғаларының *қосындысы* деп не A оқиғасының, не B оқиғасының, не A және B оқиғаларының қатар орындалуын айтамыз және былай белгілейміз $A+B$.

A және B оқиғаларының *көбейтіндісі* деп A мен B оқиғаларының бір уақытта бірге қатар орындалуын айтамыз және былай белгілейміз $A \cdot B$.

A оқиғасы B оқиғасының *құрамында жатады* деп айтамыз, егер A оқиғасының пайда болуы B оқиғасының да пайда болуын қамтамасыз етсе және былай белгілейміз $A \subset B$.

Егер $A \subset B$ болса, онда $A \cdot B=A$ және $A+B=B$ екені жоғарыдағы анықтамалардан шығады.

A және B оқиғаларының *айырмасы* деп A оқиғасы орындалып, B оқиғасы орындалмайтын оқиғаны айтамыз және $C=A\backslash B$ немесе $C=A-B$ деп белгілейміз.

Сынау нәтижесінде пайда болған A оқиғасы B оқиғасының да пайда болуын қамтыса (яғни, $A \subset B$) не осы сынауда B оқиғасының пайда болуы A оқиғасының да пайда болуын қамтыса (яғни $B \subset A$), онда A және B оқиғалары *мәндес* (эквивалент) деп атаймыз және $A=B$ деп белгілейміз. Өзара мәндес оқиғалар *теңбе-тең* немесе *тең* оқиғалар деп аталады.

Сынау нәтижесінде оқиға сөзсіз пайда болатын болса, ондай оқиға *ақиқат оқиға* деп аталады.

Сынау нәтижесінде оқиға мүлдем пайда болмайтын болса, ондай оқиға *жалған оқиға* деп аталады.

Ақикат оқиғаны Uдеп , жалған оқиғаны V деп белгілейміз.

Сынау жүргізгенде оқиғалардың кез келген екеуі бір уақытта бірге пайда бола алмайтын болса, бұндай оқиғалар *үйлесімсіз оқиғалар* деп аталады.

Егер A және B оқиғалары үйлесімсіз болса, онда $A \cdot B=V$.

$\overline{A}$ оқиғасы A оқиғасына *қарама-қарсы оқиға* деп аталады, егер A оқиғасының орындалмауынан $\overline{A}$-ның орындалатыны және A оқиғасының орындалуынан $\overline{A}$ оқиғасының орындалмайтыны шығатын болса.

Ендеше, осы анықтамаларға сүйене отырып, төмендегі теңдіктерге оңай көз жеткізуге болады:

$$A+A=A \qquad A \cdot A=A \qquad A+\overline{A}=U \qquad A \cdot \overline{A}=V$$
$$A+V=A \qquad A \cdot V=V \qquad A+U=U \qquad A \cdot U=A$$

Оқиғалардың қосындысы, көбейтіндісі және айырмасының анықтамаларын қолдана отрып,мына төмендегі теңдіктерге көз жеткізуге болады:

$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	$A\cup B=B\cup A$
$A\cap B=B\cap A$	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
$A\backslash B=A\cap \overline{B}$	$A\cap(B\cup C)=A\cap B\cup A\cap C$	$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup B\cap C$
$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Мысал 1.1. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Әр ойын сүйегінің алты жағы бар және олар 1-ден 6-ға дейін нөмірленген. А оқиғасы – «түскен ұпайлар санының қосындысы тақ сан», В оқиғасы – «тым болмағанда бір рет 2 цифры түсті» деген оқиғалар. А+В, А·В, $\overline{A}$ оқиғаларының қандай оқиғалар болатынын көрсетелік.

Жалпы мүмкін жағдайларды таблица түрінде қарастыралық: бірінші цифр бірінші сүйекті лақтырғанда түскен ұпай саны, екінші цифр екінші сүйекті лақтырғанда түскен ұпай саны.

11	***12***	13	14	15	16
21	***22***	***23***	***24***	***25***	***26***
31	***32***	33	34	35	36
41	***42***	43	44	45	46
51	***52***	53	54	55	56
61	***62***	63	64	65	66

А оқиғасын қанағаттандыратын жағдайларды таблицада астын сызып белгілейік, ал В оқиғасын қанағаттандыратын жағдайларды қою қара курсивпен жазалық. Онда А+В оқиғасы анықтама бойынша асты сызылған да, қою қара курсивпен де жазылған жағдайлар, яғни А+В={(1;1), (1;2), (1;4), (1;6), (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6), (3;2), (3;4), (3;6), (4;1), (4;2), (4;3), (4;5), (5;2), (5;4),(5;6),(6;1),(6;2),(6;3), (6;5)}.

А·В оқиғасы әрі асты сызылған, әрі қою қара курсивпен жазылған оқиғалар, яғни А·В={(1;2), (2;1), (2;3), (2;5), (3;2), (5;2)}.

Ал $\overline{A}$ оқиғасы - А оқиғасының құрамына кірмейтін асты сызылмаған 18 жағдай.

2 КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Шешуі «нешеу», «неше тәсілмен» деген сұрауларды қажет ететін есептер *комбинаторикалық (қосылыс) есептер* делінеді. Мұндай есептерді шешумен айналысатын математика саласы *комбинаторика* немесе *комбинаторикалық математика* деп аталады.

Комбинаторика есептерін екі әдіспен шешуге болады. Оның біріншісі, есептің мүмкін жағдайларын бір-бірден есептеп қажетті жауапқа ие болу; ал екіншісі есептеуге жеңіл болатын, уақытқа үнемді комбинаторика элементтері: орналастыру, алмастыру және терудің қорытылған формаларын қолдану. Бірақ, күрделі есептерді шығаруда бірінші әдіс қиындыққа әкеп соғуы мүмкін.

Орналастыру деп айырмашылықтары не элементтерінің құрамында, не элементтерінің орналасу ретінде болатын әртүрлі n элементтің ішінен m элемент бойынша құралған топтастыруды айтамыз.Оны A_n^m деп белгілейміз.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2.1)$$

мұндағы n! (эн факториал) дегеніміз $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot n$ 1-ден n-ге дейінгі натурал сандардың көбейтіндісі

Ескерту: 0!=1 деген ұйғарым алынған.

Алмастыру деп n элементтен n-нен алынған орналастыруды айтамыз. Оны P_n деп белгілейміз. Ендеше $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$ Яғни,

$$P_n = n! \qquad (2.2)$$

Егер орналастырулар мен алмастыруларда элементтердің орналасу реті үлкен роль атқарса, келесі комбинаторика элементі: *теруде* элементтердің орналасу ретіне көңіл аударылмайды.

Ендеше, *теру* деп – айырмашылығы кемінде бір элементінде болатын, әртүрлі n элементтен m элемент бойынша құралған топтастыруды айтамыз. Оны C_n^m деп белгілейміз.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (2.3)$$

Сонымен, комбинаторика есептерін шығару кезінде, ең алдымен, есеп мазмұнындағы элементтердің орналасуы ескерілуі қажет пе жоқ па, соны анықтау қажет. Егер элементтерінің орналасу реті қажет болмаса, ол бірден теру болатыны айқын. Басқа жағдайда, ол орналастыру немесе алмастыру. Оның орналастыру ма, алмастыру ма екендігін жоғарыдағы анықтама бойынша айқындауға болады.

Мысал: 1.2.1. 1,2,3 цифрларынан неше үш таңбалы сан құрауға болады, егер әрбір цифр бұл санның құрамына бір рет қана енетін болса?

Шешуі: Есептің мазмұнындағы құралуы қажет санның орналасу реті ескеріледі, себебі, мысалы 1 2 3 пен 1 3 2 әртүрлі сандар (2 мен 3- тің орнын ауыстырғанда). Ендеше, бұл орналастыру, не алмастыру. Үш цифрдан үш таңбалы сан сан құру қажет болғандықтан, n= 3 және m=3. Яғни, бұл алмастытыру P=3!=1·2·3=6. Есептің шартын қанағаттандыратын 6 сан құруға болады. Жауабы: 6.

Мысал 2.2. 1,2,3 цифрларынан қанша екі таңбалы сан құрауға болады,егер әрбір цифр бұл санның құрамына бір рет қана енетін болса?

Шешуі: Есептің шартын қанағаттандыратын құрау керек санның орналасу реті ескеріледі, ендеше ол не алмастыру, не орналастыру(12 және 21 әртүрлі сандар). Бұл есепте үш цифрдан екі-екіден комбинация құру қажет, яғни n=3, m=2. Онда бұл орналастыру: $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$.

Жауабы: 6

Мысал 2.3. Жәшікте 10 зат бар. Жәшіктен неше тәсілмен екі деталь таңдап алуға болады?

Шешуі: Жәшіктегі детальдардың ішінен екі деталь алдық, оны қолымызға ұстап тұрып қанша орнын алмастырсақ та ешнәрсе өзгермейді, бұл тек бір ғана таңдау болады. Яғни, бұл мысалда элементтерінің орналасу реті ескерілмейді, олай болса бұл – теру:

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45 .$$

Жауабы: 10 детальдан 45 тәсілмен екі деталь таңдап алуға болады

Біз жоғарыда есептер қарастырғанда қандай да бір үш, төрт т.с.с. таңбалы сандар құрастыруда есеп шартында «берілген цифрлар бұл сандардың құрамына бір рет қана енеді» деген шартқа байланысты элементтері бір рет қана кезігетін, қайталанбайтын жағдайларды қарастырдық. Егер элементтері қайталанатын болса, онда қайталанбалы орналастыру, қайталанбалы алмастыру және қайталанбалы теру формулаларын қолданамыз.

Қайталанбалы орналастыру: $\overline{A_n^k} = n^k$.

Қайталанбалы алмастыру: $\overline{P}_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$

Қайталанбалы теру : $\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Есеп шығару кезінде жиі кездесетін мынадай комбинаторикалық схеманы көрсетуге болады:

n элементті A жиыны сәйкесінше $n_1, n_2, \ldots, n_k$ элементті $A_1, A_2, \ldots, A_k$ жиындарының қосындысы болсын ($\sum_{i=1}^{k} n_i = n$), ал B жиыны m элементті A жиынының ішкі жиыны және B жиынының m_1 элементі A_1 жиынына тиісті , m_2 элементі A_2 жиынына тиісті , т.с.с., m_k элементі A_k жиынына тиісті ($\sum_{i=1}^{k} m_i = m$) болсын. A жиынынан осындай B жиынын барлық бөліп алу әдістерінің саны:

$$C_{n_1}^{m_1} \times C_{n_2}^{m_2} \times \ldots \times C_{n_k}^{m_k} \qquad (2.4.)$$

Мысалдар қарастыралық:

Мысал 2.4. 1,2,3,4,5,6,7 цифрларынан қанша үш таңбалы сан құрауға болады?

Шешуі: Бұл есептің берілуінде жоғарыда берілген цифрлар бір рет қана кезігуі қажет деген шарт жоқ, сондықтан

121

111

112 . . . т.с.с. сандар да есеп шартын қанағаттандыратын үш таңбалы сандар қатарына жатады. Бұл жағдайда n=7, ал k=3.Қайталанбалы орналастыруды қолданамыз:

$\overline{A}_7^3 = 7^3 = 343$. Жауабы: 343.

Мысал 2.5. Бірдей карточкаларға А,А,А,Е,И,К,М,М,Т,Т әріптері жазылған. Осы әріптерден 10 әріптен құралатын сөздерді неше тәсілмен құрауға болады?

Шешуі: Бұл есепте әріптердің барлығы әртүрлі десек, онда $P_{10}=10!$ Есептің шешімі болар еді. Бірақ, бұл есепте А әрпі 3 рет, М әрпі 2 рет, Т әрпі 2 рет қайталанып тұр.

Сондықтан, біз қайталанбалы алмастыру формуласын қолданамыз: $n_1=3$ – А әрпі 3 рет қайталанғандықтан, $n_2=2$ – М әрпі 2 рет қайталанғандықтан, $n_3=2$ – Т әрпі 2 рет қайталанғандықтан. Ендеше,

$\overline{P}_{10}^{3,2,2} = 151200$. Жауабы: 151200.

Мысал 2.6. Кондитерлік дүкенде үш түрлі тәтті тоқаш бар: наполеон, эклер,қаттама. Неше тәсілмен 9 тәтті тоқаш сатып алуға болады?

Шешуі: Бұл есепте сатып алынған 9 тәтті тоқаштың кез келген екеуінің не үшеуінің орнын алмастырғаннан бұл бір ғана таңдау болады. Яғни, орналасу реті ескерілмейді. Ендеше бұл теру және қайталанбалы теру: себебі сатып алынған 9 тәтті тоқаштың барлығы да бір түрінен болуы мүмкін т.с.с., яғни элементтері қайталанады.

$\overline{C}_3^9 = 55$. Жауабы: 55.

Мысал 2.7. Жәшікте 12 шар бар, оның алтауы ақ, үшеуі қара және қалғандары жасыл. Жәшіктен неше тәсілмен 3 ақ, 2 қара және 1 жасыл шар таңдап алуға болады?

Шешуі: Бұл есепті екі әдіспен шешелік:

Бірінші әдіс: А оқиғасы – жәшіктен 3 ақ шар таңдап алу оқиғасы

В оқиғасы – жәшіктен 2 қара шар таңдап алу оқиғасы

С оқиғасы – жәшіктен 1 жасыл шар таңдап алу оқиғасы болсын. А,В,С оқиғалары біруақытта бірге орындалғандықтан, бұл оқиғалардың көбейтіндісі болады: А·В·С.

$A = C_6^3 = 20$; $B = C_3^2 = 3$; $C = C_3^1 = 3$

20·3·3=180 тәсілмен таңдап алуға болады.

Екінші әдіс: (2.4) формуласы бойынша 3 ақ, 2 қара және 1 жасыл шарды

$C_6^3 \times C_3^2 \times C_3^1 = 20 \cdot 3 \cdot 3 = 180$ тәсілмен алуға болады.

3 ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҢ КЛАССИКАЛЫҚ АНЫҚТАМАСЫ.

Қандай да бір А оқиғасының орындалуының сандық мөлшерін осы А оқиғасының *ықтималдығы* деп айтамыз және былай белгілейміз: p(A). Оның қабылдайтын мәндері $0 \le p(A) \le 1$.

А оқиғасының орындалу ықтималдығының классикалық анықтамасы төмендегідей анықталады:

$$p(A) = \frac{m}{n} \qquad (3.1)$$

мұндағы n-барлық мүмкін сынаулардың жалпы саны, m - А оқиғасы орындалатын сынаулар саны.

Ақиқат оқиғаның ықтималдығы $p=1$. Анықтамаға сүйенсек, А – ақиқат оқиға болғандықтан $m=n$ болады да $p(A)=1$.

Мысал 3.1. Жәшікте тек ақ шарлар бар. Бұл жәшіктен бір шар алынған. Алынған шардың ақ болу ықтималдығын табыңыз.

Бұл оқиға ақиқат оқиға. Сондықтан, $p=1$.

Жалған оқиғаның ықтималдығы $p=0$. Бұл жағдайда анықтамаға сүйенсек $m=0$ болады да $p = \frac{0}{n} = 0$

Мысал 3.2. 10 мамыр күні Назгүл жоғарғы математика пәніне қатысқан жоқ. Осы күні Назгүлдің осы пәннен тақтаға есеп шығару ықтималдығын табыңыз.

Бұл оқиға жалған оқиға болғандықтан $p=0$.

Сынаудың барлық мүмкін жағдайларын қарастыратын үйлесімсіз оқиғалар оқиғалардың *толық тобын* құрайды.

Мысал 3.3. Монета екі рет лақтырылған. Монетаның «герб» жағының немесе «сан» жағының түсуінің барлық мүмкін жағдайларын қарастырсақ:

A_1 - бірінші лақтырғанда «герб», екінші лақтырғанда «сан» жағы түсу;
A_2 - бірінші лақтырғанда «сан», екінші лақтырғанда «герб» жағы түсу;
A_3 – екі ретте де «герб» жағы түсу;
A_4 - екі ретте де «сан» жағы түсу;

Бұдан басқа мүмкін жағдай жоқ. A_1, A_2 ,A_3, A_4 оқиғалары оқиғалардың толық тобын құрайды және олар үйлесімсіз оқиғалар.

Оқиғалардың толық тобының ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең. Жоғарыдағы мысалда $p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)+p(A_4)=1$.

$\overline{A}$ оқиғасы А оқиғасына *қарама-қарсы оқиға* болса, онда $\overline{A}$ және А оқиғалары оқиғалардың *толық тобын* құрайтыны анық, ендеше

$$p(A)+p(\overline{A})=1 \qquad (3.2)$$

Мысал 3.4. Қорапта жақсылап араластырылған 6 шар бар: оның екеуі қызыл, үшеуі көк және біреуі ақ. Қораптан кез келген бір шар алынды. Алынған шардың түрлі-түсті шар (қызыл не көк) болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі: А-алынған шардың түрлі-түсті болуы. Қораптағы 6 шарды есеп шарты бойынша бір-бірден алсақ, жалпы 6 жағдай болады, яғни n=6. Алты рет алынған барлық шардың екеуі қызыл, үшеуі көк. Яғни, А оқиғасы орындалатын сынаулар саны: m=2+3=5. p(A)=5/6.

Мысал 3.5. Заводта N деталь бар және оның ішіндегі t деталь берілген үлгіге сай емес. Детальдың қандай екеніне көңіл аударылмай жәшікке s деталь салынды. Жәшікке салынған детальдардың k-сы берілген үлгіге сай болмау ықтималдығын тап.

Шешуі: А – «жәшікке салынған детальдардың k-сы берілген үлгіге сай емес» деген оқиға болсын. Алдымен барлық мүмкін сынаулардың жалпы санын анықталық: барлық N детальдың ішінен жәшіккі s детальды $n = C_N^s$ тәсілмен салуға болады.

Енді, А оқиғасы орындалатын сынаулар санын табалық: берілген үлгіге сай емес k детальды t детальдың ішінен C_t^k әдіспен алуға болады және барлығы s деталь алынғандықтан N-t детальдың ішінен үлгіге сай s-k деталь таңдап алу тәсілі C_{N-t}^{s-k} . Яғни, А оқиғасы орындалатын сынаулар саны: $C_t^k \cdot C_{N-t}^{s-k}$.

Ендеше, $p = \dfrac{C_t^k \cdot C_{N-t}^{s-k}}{C_N^s}$.

Мысал 3.6. Топтағы 25 студенттің оны ер бала. «Бингоның» бес билеті 5 студентке таратылып берілді. Билеті бар студенттердің екеуі ер бала болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі: «Бингоның» бес билеті бес студентке барлығы $n = C_{25}^5$ тәсілмен таратуға болады. А оқиғасы – билет таратылған студенттердің екеуі ер бала болу оқиғасы болсын. Онда 10 ер баладан 2 ер баланы неше тәсілмен таңдап алуға болатынын табамыз да:, 25-тің 10-ы ер бала болса қалғаны қыз бала:15, ал барлығы алынған 5 студенттің екеуі ер бала болса, қалған үшеуі қыз бала. Яғни, $m = C_{10}^2 \cdot C_{15}^3$.

Ендеше, $p = \dfrac{C_{10}^2 \cdot C_{15}^3}{C_{25}^5} = 0{,}385$.

4 ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫҚ.

Егер орындалатын барлық сынаулардың жиыны шексіз жиын болса, онда

$$p(A) = \frac{mes\{\Omega_A\}}{mes\{\Omega\}} \quad (4.1)$$

мұндағы Ω – барлық сынаулар жиыны, ал Ω_A- А оқиғасы орындалатын сынаулар жиыны. mes - жиын өлшемі (ұзындық, аудан, көлем т.с.с.).

Мысал 4.1. Радиустары 5 см және 3см болатын концентрлі екі шеңбер берілген. Үлкен шеңберге лақтырылған нүктенің үлкен мен кіші шеңбер арасында пайда болған сақинаға түсу ықтималдығын табыңыз, егер нүктенің шеңберге түсу ықтималдығы шеңбер ауданына пропорционал және орналасуына байланысты емес болса.

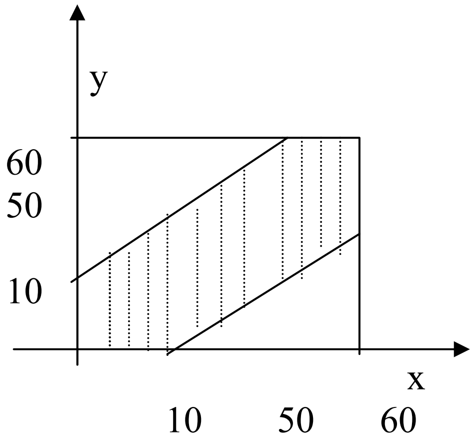
Шешуі: А оқиғасы – «үлкен шеңберге лақтырылған нүктенің сақинаға түсуі». Лақтырылған нүкте үлкен шеңберге түсуі мүмкін, барлық сынаулар жиыны үлкен шеңбер ауданы: $25\pi R^2$. Ал сақинаның ауданы $25\pi R^2 - 9\pi R^2 = 16\pi R^2$. Яғни, бұл А оқиғасын қанағатттандыратын сынаулар жиыны. Ендеше, p(A)=$\frac{16\pi R^2}{25\pi R^2} = \frac{16}{25}$.

Мысал 4.2. Жазықтық ара қашықтықтары 7см болатын паралель түзулермен бөлінген. Осы жазықтыққа лақтырылған радиусы 1 см монетаның бірде-бір түзуді қимау ықтималдығын тап.

Шешуі: x – монетаның центрінен жақын түзуге дейінгі ара қашықтық болса, онда $1 \le x \le 6$ аралыққа түскенде түзуді қимайды. Онда жалпы кесіндінің ұзындығы 7 см, ал монетаның центрі түсуі қажет кесіндінің ұзындығы 5 см. Ендеше, p=$\frac{5}{7}$.

Мысал 4.3. Екі студент 10^{00} мен 11^{00} уақыт аралығында кездесуге келісті. Алғаш келгені екіншісін 10 минут тосады да, одан кейін кете береді. Егер олардың кездесуге келу жағдайлары бір-біріне тәуелсіз болса, онда олардың кездесу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі:



10^{00} мен 11^{00} –ге дейін 1 сағат = 60 минут, яғни екі студенттің әрқайсысының келу уақыты [0;60]. x- бірінші студенттің келу уақыты, y- екінші студенттің келу уақыты болсын. $|x-y| \le 10$ болғанда, екі студент кезігеді.

Қажетті ықтималдық $p= S_{кезігу}/S_{жалпы\ келу\ уақыты}$

$S_{жалпы\ келу\ уақыты}=60\times60=3600$

$S_{кезігу}$ табалық: Ол үшін алдымен $|x-y|\le10$ графигін салайық. (Мектеп курсынан кез келген студент модулы бар теңдеу графигін сала алуы қажет.)

$\begin{cases} x-y\ge0 \\ x-y\le10 \end{cases}$ және $\begin{cases} x-y<0 \\ -(x-y)\le10 \end{cases}$

Бірінші жүйенің қандай облысты бейнелейтінін салалық: $\begin{cases} x\ge y \\ x\le10+y \end{cases}$

x	y
10	0
60	50

$x=10+y$ түзуі жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі. $x\le10+y$ (∗) облысы $x=10+y$ түзуінің не жоғарғы жарты бөлігі, не төменгі жарты бөлігі. Кез келген нүкте аламыз да (∗) теңсіздігін қанағаттандыра ма тексереміз; егер қанағаттандырса осы нүкте жатқан облыс, қанағаттандырмаса осы нүкте жатпаған облыс.

A(60;0) нүктесін (∗)-ға қойсақ, онда $60\le10+0$ теңсіздігі дұрыс емес, ендеше осы нүкте жатпаған облыс. Дәл осылай екінші жүйенің де графигін саламыз, екі облыстың қиылысуы кезігу облысы болады.

$S_{кезігу}=S_{штрих.облыс}=S_{\square}- 2\ S_{\Delta}=1100$. Ендеше $p=11/36$.

5 ЫҚТИМАЛДЫҚТАРДЫҢ ҚОСУ ЖӘНЕ КӨБЕЙТУ ТЕОРЕМАЛАРЫ.

Ықтималдықтардың қосу теоремасы. Кез келген A және B оқиғалары үшін төмендегі теңдік орындалады:

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B)$$

Салдар 5.1. Егер A және B оқиғалары үйлесімсіз болса, онда $p(A\cdot B)=0$ болады да:

$$p(A+B)=p(A)+p(B)$$

Салдар 5.2. Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары өзара үйлесімсіз болса, онда

$$A_1+A_2+\ldots+A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n)$$

Ықтималдықтардың көбейту теоремасы. Кез келген A және B оқиғалары үшін төмендегі теңдік орындалады:

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p_A(B),$$

мұндағы $p_A(B)$-A оқиғасының орындалғаны белгілі болғандағы B оқиғасының ықтималдығы.

Салдар 5.3. Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ кез келген оқиғалар болса, онда

$$p(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)\cdot p_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot p_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n),$$

мұндағы $p_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$ - $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ оқиғалары орындалғаны белгілі болғандағы A_n оқиғасының ықтималдығы.

Салдар 5.4. Егер A және B тәуелсіз оқиғалар болса, онда $p_A(B)=p(B)$ болады да:

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B).$$

Салдар 5.5. Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары тәуелсіз оқиғалар болса, онда

$$p(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot\ldots\cdot p(A_n)$$

Мысал 5.1. Кітап сөресінде 20 оқулық тұр және оның бесеуінің сырты қызыл қаппен қапталған. Студент кез келген үш оқулықты алды. Алынған оқулықтың тым болмағанда біреуінің сырты қызыл қаппен қапталған болу ықтималдығын тап.

Шешуі: A оқиғасы – «студент алған үш оқулықтың тым болмағанда біреуі қызыл қаппен қапталған».

B оқиғасы –«студент алған оқулықтың біреуі қызыл қаппен қапталған»

C оқиғасы - «студент алған оқулықтың екеуі қызыл қаппен қапталған»

D оқиғасы - «студент алған оқулықтың үшеуі де қызыл қаппен қапталған».

$A=B+C+D$ және $p(A)=p(B+C+D)$, мұндағы B,C,D оқиғалары үйлесімсіз болғандықтан $p(A)=p(B)+p(C)+p(D)$.

B,C,D оқиғаларының ықтималдығын табалық:

$$p(B)=\frac{C_5^1\cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}=\frac{35}{76},\qquad p(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{5}{38},$$

$$p(D)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{1}{114}$$

Ендеше $p(A)=\frac{35}{76}+\frac{5}{38}+\frac{1}{114}=\frac{137}{228}.$

Мысал 5.2. Үш мерген нысананы көздеп бір-біріне байланыссыз оқ атады. Бірінші мергеннің атылған оғының нысанаға тию ықтималдығы-0,7; екіншісінікі – 0,6; ал үшіншісінің бұл ықтималдығы – 0,2. Егер олар бір-бірден ғана оқ атқан болса, онда екі мергеннің де нысанаға тигізу ықтималдығын тап.

Шешуі: А- «екі мергеннің де оғы нысанаға тиді»

A_1 –«бірінші мергеннің оғы тиді»

A_2-«екінші мергеннің оғы тиді»

A_3-«үшінші мергеннің оғы тиді» деген оқиғалар болсын.

$\overline{A_1},\overline{A_2},\overline{A_3}$ сәйкесінше A_1 , A_2 , A_3 оқиғаларына қарама-қарсы оқиғалар . Онда A оқиғасын $A_!$, A_2 , A_3 оқиғалары арқылы былай өрнектеуге болады:

$$A=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3\,.$$

Есептің берілу шарты бойынша $p(A_1)=0,7$; $p(A_2)=0,6$: $p(A_3)=0,2$. Онда

$$p(\overline{A_1})=1-p(A_1)=0,3;\quad p(\overline{A_2})=1-p(A_2)=0,4;\quad p(\overline{A_3})=1-p(A_3)=0,8\,.$$

$A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3},A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3,\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3$ оқиғалары өзара үйлесімсіз және $A_!$, A_2 , A_3 оқиғалары өзара тәуелсіз, ендеше ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремаларын қолдансақ:

$$p(A)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot p(\overline{A_3})+p(A_1)\cdot p(\overline{A_2})\cdot p(A_3)+p(\overline{A_1})\cdot p(A_2)\cdot p(A_3)=0,218\,.$$

Мысал 5.3. Қорапта 7 қара, 5 қызыл және 4 ақ шарлар бар. Бір-бірден 3 шар алынды. Алынған шарлардың біріншісі қара, екіншісі қызыл, ал үшіншісі ақ болу ықтималдығын тап.

Шешуі: А-«алынған шардың біріншісі қара, екіншісі қызыл, үшіншісі ақ болу» оқиғасы, В- «алынған бірінші шар қара», С-«алынған екінші шар қара», D - «алынған үшінші шар қара» деген оқиғалар болсын. B, C, D - оқиғалары бір уақытта бірге орындалуы қажет, ендеше B · C · D. B · C · D оқиғалары өзара тәуелді оқиғалар болғандықтан көбейту теоремасы бойынша $p(A)=p(B\cdot C\cdot D)=p(B)\cdot p_B(C)\cdot p_{BC}(D)$.

p(B) табалық: барлық 16 шардан алынған бір шар қара болу ықтималдығы: $p(B)=7/16$; Алынған бірінші шар қара екені белгілі, онда қорапта қалған шарлар саны 15 және оның алтауы қара, бесеуі қызыл және төртеуі ақ: $p_B(C)=5/15=1/3$; Енді B, C оқиғалары орындалғаны белгілі: $p_{BC}(D)=4/14$.Яғни, $p(A)=1/24$.

6 ЫҚТИМАЛДЫҚТАРДЫҢ ТОЛЫҚ ФОРМУЛАСЫ ЖӘНЕ БЕЙЕС ФОРМУЛАСЫ.

6.1. Ықтималдықтардың толық формуласы

А оқиғасы $B_1, \ldots, B_n$ үйлесімсіз оқиғаларының тек біреуі пайда болғанда ғана орындалатын оқиға және $B_1, \ldots, B_n$ оқиғалары (болжамдары) оқиғалардың толық тобын құрайтын болса, онда А оқиғасының ықтималдығы төменгі формула бойынша есептелінеді:

$$p(A) = p(B_1)\cdot p_{B_1}(A) + p(B_2)\cdot p_{B_2}(A) + \ldots + p(B_n)\cdot p_{B_n}(A), \quad (6.1.)$$

мұндағы $p(B_1)+ p(B_2)+ \ldots + p(B_n)=1$.

(6.1.) формуласы *ықтималдықтардың толық формуласы* деп аталады.

Мысал 6.1. Төрт шары бар жәшікке бір ақ шар салынды және одан кейін жәшіктен бір шар алынған. Алынған шардың ақ болу ықтималдығын тап, егер бастапқыда жәшіктегі шарлардың түстері қандай болу мүмкіндіктері бірдей болса.

Шешуі: А оқиғасы – «жәшіктен алынған шар ақ». Бастапқыда жәшіктегі шарлардың қандай болғандығы туралы барлық мүмкін болжамдар:

B_1 – жәшіктегі төрт шар да ақ;
B_2 – жәшікте үш ақ және бір қара шар бар;
B_3 – жәшікте екі ақ, екі қара шар бар;
B_4 – жәшікте бір ақ, үш қара шар бар;
B_5- жәшіктегі төрт шар да қара.

Бастапқыда жәшіктегі шарлардың түстері қандай болу мүмкіндіктері бірдей болғандықтан $p(B_1)= p(B_2)= p(B_3)= p(B_4)= p(B_5)=x$ және $p(B_1)+ p(B_2)+ p(B_3)+ p(B_4)+ p(B_5)=1$, ендеше $x = \frac{1}{5}$.

Еске түсірсек, $p_{B_1}(A)$ - B_1 оқиғасы орындалғаны белгілі болғандағы А оқиғасының ықтималдығы. Ендеше, жәшікте төрт ақ шар бар екені белгілі, оған енді бір ақ шар салынған, барлығы бес ақ шар болды. Осы бес ақ шардан алынған шардың ақ болу ықтималдығы ақиқат оқиға болғандықтан $p_{B_1}(A)=1$. Дәл осылай қалған оқиғалардың ықтималдықтарын тапсақ: $p_{B_2}(A) = \frac{4}{5}$; $p_{B_3}(A) = \frac{3}{5}$; $p_{B_4}(A) = \frac{2}{5}$; $p_{B_5}(A) = \frac{1}{5}$; Олай болса, $p(A) = \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = 0{,}6$.

6.2.Бейес формуласы.

А оқиғасы $B_1, \ldots, B_n$ үйлесімсіз оқиғаларының тек біреуі пайда болғанда ғана орындалатын оқиға және $B_1, \ldots, B_n$ оқиғалары (болжамдары) оқиғалардың толық тобын құрайды. Онда А оқиғасы орындалғаны белгілі болғандағы болжамдардың орындалуының ықтималдығы төмендегідей бағаланады:

$$p_A(B_i) = \frac{p(B_i) \cdot p_{B_i}(A)}{p(A)}, \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad (6.2.)$$

мұндағы $p(A) = p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + ... + p(B_n) \cdot p_{B_n}(A)$.

Мысал 6.2. 15 спортшыдан тұратын топтың үшеуі спорт мастері, алтауы бірінші разрядты, ал қалғандары екінші разрядты спортшылар. Олардың нысанаға тигізу мүмкіндіктері сәйкесінше 0,9; 0,6 және 0,5. Кез келген бір спортшы шақырылып, нысанаға оқ атты. Бұл шақырылған спортшының спорт мастері болу ықтималдығын тап.

Шешуі: Бізге белгісізі: шақырылған спортшы кім екені(мүмкін болатын барлық оқиғалар – болжамдар).

B_1 – «шақырылған спортшы спорт мастері»

B_2 – «шақырылған спортшы бірінші разрядты спортшы»

B_3 – «шақырылған спортшы екінші разрядты спортшы»

А - «нысанаға оқ тиді» деген оқиғалар болсын.

Ал бізге есеп шарты бойынша табу қажет: $p_A(B_1)$

$$p(B_1) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}; \quad p(B_2) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}; \quad p(B_3) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$p_{B_1}(A) = 0,9; \quad p_{B_2}(A) = 0,6; \quad p_{B_3}(A) = 0,5$$

Онда $p(A) = \frac{1}{5} \cdot 0,9 + \frac{2}{5} \cdot 0,6 + \frac{2}{5} \cdot 0,5 = 0,62$. Бұдан $p_A(B_1) = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0,9}{0,62} = \frac{9}{31}$;

7 ҚАЙТАЛАНБАЛЫ ОҚИҒАЛАР (БЕРНУЛЛИ, МУАВР-ЛАПЛАС ЖӘНЕ ПУАССОН ФОРМУЛАЛАРЫ).

7.1. Бернулли формуласы (n аз шама болғанда қолданамыз).

Егер қандай да бір сынау n рет қайталанып және әрбір сынауда A оқиғасының пайда болу ықтималдығы тұрақты және p-ға тең болса, онда осы A оқиғасының n сынауда k рет пайда болу ықтималдығы:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ мұндағы } q=1-p \qquad (7.1)$$

бойынша есептелінеді.

Ал A оқиғасының ықтималды саны k_0 мына теңсіздік арқылы анықталады: $np - q \le k_0 \le np + p$.

Мысал 7.1. Жанұяда 8 бала бар. Оның бесеуі ұл болу ықтималдығын тап. Егер жанұяда бір ұл баланың дүниеге келу ықтималдығы 0,51-ге тең болса.

Шешуі: n=8, k=5, p=0,51

n аз шама болғандықтан Бернулли формуласын қолданамыз:

q=1-p=1-0,51=0,49

$$P_8(5)=C_8^5 \cdot (0{,}51)^5 \cdot (0{,}49)^3 \approx \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 0{,}034 \cdot 0{,}118 = 0{,}225.$$

Ендеше, жанұядағы 8 баланың бесеуінің ұл болу ықтималдығы 0,225-ке тең.

7.2. Муавр-Лаплас формуласы.

n үлкен шама болғанда Бернулли формуласын қолдану көп есептеуді қажет етеді, сондықтан n үлкен, ал p>0,1 (npq>9) болған жағдайда Муавр-Лаплас формуласын қолданамыз:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ мұндағы } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (7.2)$$

φ(x) функциясы өзінің сәйкес таблицасы бойынша есептелінеді және φ(x) функциясы жұп функция: φ(-x) = φ(x).

n тәуелсіз сынаулардың әрқайсысында A оқиғасының пайда болу ықтималдығы тұрақты және p-ға тең болса, онда A оқиғасының k_1 – ден кем емес және k_2-ден артық емес пайда болу ықтималдығы:

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'), \text{мұндағы } x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \ \ x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}; \qquad (7.3)$$

Φ(x) функциясы Лаплас функциясы деп аталады және $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$. Сонымен қатар, Φ(x) функциясы тақ функция Φ(-x)= -Φ(x) және Φ(x) функциясының мәндерін ($0 \le x \le 5$) арнайы таблица қолданып табамыз, ал x>5 болған жағдайда Φ(x)=0,5.

Мысал 7.2. Барлығы 600 лабороториялық жұмыс жүргізілді. Оның әрқайсысының нәтижелі орындалу ықтималдығы 0,2. 150-ден 300-ға дейінгі лабороториялық жұмыстың нәтижелі болу ықтималдығын тап.

Шешуі: n=600 үлкен шама, p=0,2 >0,1 болғандықтан Муавр-Лаплас формуласын қолданамыз. Яғни, бізге P(150; 300) табу қажет.

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{150 - 600 \cdot 0,2}{\sqrt{600 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \approx 3,06; \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 600 \cdot 0,2}{\sqrt{600 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \approx 18,37;$$

Φ(x) функциясының арнайы таблицасын қолданып Φ(3,06)=0,4986 табамыз; ал $x''>5$ болғандықтан Φ(18,37)=0,5.

Ендеше, P(150; 300) =0,5-0,4986=0,0014.

7.3. Пуассон формуласы.

n үлкен шама, ал p кіші болған жағдайда (яғни npq<9) $P_n(k)$ –ны есептеу үшін Пуассон формуласын қолданамыз:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ мұндағы } \lambda = np. \qquad (7.3)$$

Мысал 7.3. Оқулық 20 000 экземпляр болып басылып шықты. Бір оқулықтың дұрыс қапталмаған болу ықтималдығы 0,0003 болса, оқулықтың бесеуі дұрыс қапталмаған болу ықтималдығын тап.

Шешуі: n=20 000 үлкен шама, ал p=0,0003 кіші болғандықтан $P_{20000}(5)$ –ды есептеу үшін Пуассон формуласын қолданамыз:

$$\lambda = np = 20\,000 \cdot 0,0003 = 6; \quad P_{20000}(5) = \frac{6^5}{5!} \cdot e^{-6} \approx 0,16.$$

Яғни, 20 000 оқулықтың бесеуі дұрыс қапталмаған болу ықтималдығы 0,16-ға тең.

8. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМА.

Кездейсоқ шама деп - сынақ нәтижесінде бір мүмкін мәнді қабылдайтын шама және оның қандай мән қабылдайтыны алдын-ала белгісіз.

Кездейсоқ шаманың екі түрі бар: дискретті және үздіксіз кездейсоқ шама.

Дискретті кездейсоқ шама (Д.К.Ш) деп – саналымды мәндер қабылдайтын кездейсоқ шама (ол ақырлы да, шексіз де болуы мүмкін).

Үздіксіз кездейсоқ шама (Ү.К.Ш) деп – мүмкін мәндерінің жиыны тұтас аралық болатын кездейсоқ шама.

Ықтималдықтың таралу заңдылығы деп – кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтарымен берілу жиынтығын айтамыз.

Д.К.Ш. X-тің таралу заңдылығы таблица түрінде берілуі мүмкін, ол таблица кейде таралу қатары деп те аталады:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

мұндағы $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Сонымен қатар, X кездейсоқ шамасының таралу заңдылығы таралу функциясы немесе таралу тығыздығы арқылы берілуі мүмкін.

X кездейсоқ шамасының *таралу функциясы* деп - төмендегі теңдік арқылы анықталған функцияны айтамыз:

$$F(x)=P\ (X<x) \qquad (8.1)$$

Таралу функциясының қасиеттері:

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $F(-\infty) = 0;\ \ F(+\infty)=1$
3. $P(a<X<b)=F(b) - F(a)$
4. F(x) функциясы барлық сан осінде өспелі функция.

X үздіксіз кездейсоқ шамасының *таралу тығыздығы* деп $f(x)=F'(x)$ функциясын айтамыз. Таралу тығыздығының төмендегідей қасиеттері бар:

1. $f(x)\ge 0,\ x\in(-\infty; +\infty)$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
4. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

X кездейсоқ шамасының *математикалық күтімі* деп

$$M(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \text{ егер } X\text{ - дискретті шама}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx, \text{ егер } X\text{ - уздіксіз шама}\end{cases} \qquad (8.2)$$

формуласымен анықталатын шаманы айтамыз. Оның төмендегідей қасиеттері бар:
1.M(C)=C; 2. M(CX)=C M(X); 3. M(X+Y)=M(X)+M(Y), мұндағы C - тұрақты шама; X,Y – кездейсоқ шамалар.

X кездейсоқ шамасының *дисперсиясы* деп

$$D(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X), \text{ егер } X\text{ - дискретті шама}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx - M^2(X), \text{ егер } X\text{ - уздіксіз шама}\end{cases} \qquad (8.3)$$

формуласымен анықталатын шаманы айтамыз. Оның төмендегідей қасиеттері бар:
1.D(C)=0; 2. D(CX)=C^2 D(X); 3. D(X+Y)=D(X)+D(Y); 4.D(X)≥0, мұндағы C - тұрақты шама; X,Y – кездейсоқ шамалар.

Орта квадраттық ауытқу деп $\sigma=\sqrt{D(X)}$ формуласы бойынша есептелінетін шаманы айтамыз.

Кездейсоқ шаманың моменттері:

X кездейсоқ шамасының *k-шы ретті бастапқы моменті* ν_k деп

$$\nu_k=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i, \text{ егер } X\text{ - дискретті шама}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\cdot f(x)dx, \text{ егер } X\text{ - уздіксіз шама}\end{cases} \qquad (8.4)$$

формуласымен анықталатын шаманы айтамыз.

X кездейсоқ шамасының *k-шы ретті центрлік моменті* μ_k деп

$$\mu_k=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} (x_i-\nu_1)^k p_i, \text{ егер } X\text{ - дискретті шама}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\nu_1)^k\cdot f(x)dx, \text{ егер } X\text{ - уздіксіз шама}\end{cases} \qquad (8.5)$$

формуласымен анықталатын шаманы айтамыз.
Бастапқы момент пен центрлік момент арасында мынадай байланыс бар:
$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2$; $\mu_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^3$; $\mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4$.

Таралу заңдылығының *асимметриясы мен эксцессі:*

Таралу заңдылығының *асимметриясын* Sk арқылы белгілейміз және $Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$.

Таралу заңдылығының *эксцессін* Ex арқылы белгілейміз және $Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

Мысал 8.1. X дискретті кездейсоқ шамасы таблица түрінде берілген. X кездейсоқ шамасының математикалық күтімін; дисперсиясын; орташа квадраттық ауытқуын; бірінші, екінші, үшінші және төртінші ретті теоретикалық және центрлік моментін; таралу заңдылығының ассиметриясы мен эксцессін тап. 0,01-ге дейін дөңгелекте.

X	1	2	3	4	5
p	0,01	0,05	0,07	0,07	0,8

Шешуі: $M(X)=1\cdot 0{,}01+2\cdot 0{,}05+3\cdot 0{,}07+4\cdot 0{,}07+5\cdot 0{,}8=4{,}6$

$M(X^2)= 1^2\cdot 0{,}01+2^2\cdot 0{,}05+3^2\cdot 0{,}07+4^2\cdot 0{,}07+5^2\cdot 0{,}8=21{,}96$

$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=21{,}96 - (4{,}6)^2 =0{,}8$

$\sigma=\sqrt{0{,}8}\approx 0{,}89$

$\nu_1=M(X)=4{,}6$

$\nu_2= M(X^2)=21{,}96$

$\nu_3=M(X^3)= 1^3\cdot 0{,}01+2^3\cdot 0{,}05+3^3\cdot 0{,}07+4^3\cdot 0{,}07+5^3\cdot 0{,}8= 106{,}78$

$\nu_4=M(X^4)=1^4\cdot 0{,}01+2^4\cdot 0{,}05+3^4\cdot 0{,}07+4^4\cdot 0{,}07+5^4\cdot 0{,}8= 524{,}4$

$\mu_1=0$; $\mu_2= \nu_2 - \nu_1^2 =0{,}8$; $\mu_3=\nu_3 - 3\nu_2\nu_1+2\nu_1^3=-1{,}6$;

$\mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4= 4{,}45$.

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-1{,}6}{0{,}71} = -2{,}25. \quad Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{4{,}45}{0{,}64} = 6{,}95.$$

Мысал 8.2. X үздіксіз шамасының таралу функциясы берілген. a коэффицентін ; таралу тығыздығын; математикалық күтімін; дисперсиясын; орташа квадраттық ауытқуын тап

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{егер} \quad x \le 3, \\ (x-a)^2, \text{ егер } 3 < x \le 4, \\ 1, \text{ егер } x \ge 4. \end{cases}$$

Шешуі: Бізге $f(x)=F'(x)$ екені белгілі, ендеше

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 3, \\ 2(x - a), \text{ егер } 3 < x \le 4, \\ 0, \text{ егер } x \ge 4. \end{cases}$$

Таралу тығыздығының $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ қасиетін қолданып, a коэффицентін таба аламыз:

$$\int_3^4 2(x-a)dx = 2\cdot\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_3^4 = (4-a)^2 - (3-a)^2 = 1 \Rightarrow a = 3.$$

Енді математикалық күтімі мен дисперсиясын табалық:

$$M(X) = \int_3^4 xf(x)dx = 2\int_3^4 x(x-3)dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_3^4 = \frac{11}{3};$$

$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=$ $\int_3^4 x^2 \cdot f(x)dx - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = 2\int_3^4 x^2\cdot(x-3)dx - \frac{121}{9} = \frac{1}{18};$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} = 0{,}236.$

9. ЖАТТЫҒУЛАР.

9.1. Оқиғалар арасындағы қатыстар мен амалдарды пайдаланып, келесі есептерді шығар:

9.1.1. Кез келген A, B, C оқиғалары үшін төмендегі теңдіктерді дәлелде:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup B \cap C$$

9.1.2. Кез келген A және B оқиғалары үшін:

а) $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$ б) $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A + B$

теңдіктерінің дұрыстығын дәлелдеп, сипаттамасын жаз.

9.1.3. Қорапта қызыл, көк және сары шарлар бар. Шарлар жақсылап араластырылып, кез келген үш шар жәшіктен алынған. A_k , B_k , C_k – k-шы алынған шар сәйкесінше қызыл,көк және сары. D-«алынған шарлардың ішінде тек бір ғана қызыл шар бар» деген оқиға болсын. D оқиғасын A_k , B_k , C_k оқиғалары арқылы өрнекте.

9.1.4.Тепе-теңдікті дәлелде: $(B + C)(B + \overline{C})(\overline{B} + C) = BC$

9.1.5. Ықшамда: $A(\overline{B} + C)(A + B)(A + \overline{C})$

9.1.6. A және B оқиғалары үйлесімсіз $(A + \overline{B})(A + C)(A + \overline{C})$ өрнегі неге тең?

9.1.7. Ықшамда: $C(\overline{B} + C)(A + B)(B + \overline{C})$

9.1.8. $A \subset B$ белгілі, (AB+B)(AC+B)(A+C) неге тең?

9.1.9. A және $\overline{A \cup B}$ оқиғалары үйлесімді ме, жоқ па?

9.1.10. Кластан шақырылған кез келген оқушының белгілі бір пәннен алған бағасы жақсы болуы A оқиғасы, орташа болуы B оқиғасы, нашар (екі) болуы C оқиғасы болсын. A+B, AB, AC, $\overline{A + B}$, $\overline{A + C}$, $\overline{AC} + B$, $\overline{\overline{A}}$ оқиғаларын сипаттап бер.,

9.1.11. A-«алынған үш заттың тым болмағанда біреуі жарамсыз», ал B - «алынған заттың үшеуі де жарамды» деген оқиғалар болса:

а) $A + \overline{B}$ б)AB

оқиғаларының сипаттамасын жаз.

9.1.12. A және B оқиғалары үйлесімсіз оқиғалар болса, $(A + B)(A + C)(A + \overline{C})$ өрнегі неге тең?

9.1.13. Бес студент ықтималдықтар теориясынан емтихан тапсырды. A_k – сәйкесінше k-шы студент емтихан тапсырып шықты (екілік емес) деген оқиғалар және B-«тек қана үш студент емтихан тапсырып шықты» деген оқиға болса, B оқиғасын A оқиғасы арқылы өрнекте.

9.1.14. $A \subset B$ екені белгілі болса, онда $A \cap (B \backslash A)$ оқиғасын сипатта.

9.1.15. Екі ойын сүйегі лақтырылған. A –«екі ойын сүйегінен түскен ұпайлардың қосындысы жұп», B- «ойын сүйегінің біріндегі түскен ұпай саны жұп» деген оқиғалар болса, $A \cup B$ және $A \cap B$ оқиғаларын сипатта.

9.1.16. Өрнекті ықшамда: $C(\overline{B} + C)(A + \overline{B})(B + \overline{C})$

9.1.17. $A \cup C = B \cup C$ теңдігінен A мен B оқиғалары мәндес екені шыға ма?

9.1.18. B=A+C екені белгілі болса, $A\cdot B+A\cdot\overline{B}+B\cdot C+C\cdot\overline{B}=B$ екенін дәлелде.

9.1.19. Монета 3 рет лақтырылған. A_i - "і-ші лақтырыста герб түседі» деген оқиға болса, ал B- «екі рет герб түседі» деген оқиға болсын. B оқиғасын A_i оқиғасы арқылы өрнекте.

9.1.20. Өрнекті ықшамда: $(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(AB+A)$

9.1.21. Келесі оқиғалар A және B оқиғалары қандай болғанда орындалады:

а) $A+B=A\cdot B$

б) $AB=\overline{A}$

в) $A+B=A$

9.1.22. Өрнекті ықшамда: $(A+B)(\overline{A}+C)(\overline{C}+\overline{B})$

9.1.23. $A\subset B$ екені белгілі болса, $A\cup(B\backslash A)$ оқиғасын сипатта.

9.1.24. Келесі оқиғалар A және B оқиғалары қандай болғанда орындалады:

а) $A+B=\overline{A}$

б) $A\cdot B=A$

9.1.25. $(A+\overline{B})(\overline{A}+B)+(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$ оқиғасының ақиқат оқиға екенін дәлелде.

9.1.26. Нысанаға төрт оқ атылды. A_i – «і-ші атылған оқ нысанаға тиді» деген оқиға, ал B – «тек үш оқ нысанаға тиді» деген оқиға болсын. B оқиғасын A_i оқиғасы арқылы өрнекте.

9.1.27. $A\subset B$ белгілі, $(AB+B)(AC+B)(B+\overline{C})$ неге тең?

9.1.28. Дәлелде: $(B+A)(B+\overline{A})(\overline{B}+A)=AB$

9.1.29. A,B,C оқиғалары оқиғалардың толық тобын құрайды: $B+AB+AC+BC+A\overline{B}+C\overline{B}$ оқиғасы неге тең?

9.1.30. Бес студент ықтималдықтар теориясынан емтихан тапсырды. A_k – сәйкесінше k-шы студент емтихан тапсырып шықты (екілік емес) деген оқиғалар және B-«тек қана үш студент емтихан тапсырып шықты» деген оқиға болса, B оқиғасын A оқиғасы арқылы өрнекте.

9.2. Комбинаторика элементтерін қолданып, келесі есептерді есепте:

9.2.1. 1,2,3 цифрларынан неше екі таңбалы сан құрауға болады, егер әрбір цифр бұл санның құрамына бір рет қана енетін болса?

9.2.2. Берілген 8 нүкте арқылы неше түзу жүргізуге болады, егер кез келген үш нүкте бір түзудің бойында жатпаса?

9.2.3. Энциклопедия 8 томнан тұрады. Реттері сақталмайтындай етіп кітап сөресіне бұл 8 том кітапты қалай орналастыруға болады, яғни, кітап сөресінде энциклопедия томдарының орналасу реті бірден сегізге дейін бірінен кейін бірі ретпен орналасқан емес?

9.2.4. 1,2,3,4 цифрларынан канша үш таңбалы және төрт таңбалы сан құрауға болады, егер әрбір цифр бұл санның құрамына бір рет қана енетін болса?

9.2.5. Жергілікті комитетте 6 адам бар. Олардың ішінен председатель мен оның орынбасарын тағайындау қажет. Неше тәсілмен председатель мен оның орынбасарын тағайындауға болады?

9.2.6. 0,1,2,3 цифрларынан неше төрт таңбалы сан құрауға болады, егер әрбір цифр бұл санның құрамына бір рет қана енетін болса?

9.2.7. Студент 12 күннің ішінде 5 пәннен емтихан тапсыруы қажет. Неше тәсілмен емтихан кестесін (расписания) құруға болады?

9.2.8. 1,2,3,4,5,6 цифрларынан 2 цифрынан басталып 5 цифрынан аяқталатын неше алты таңбалы сан құруға болады, егер әрбір цифр бұл санның құрамына бір рет қана енетін болса?

9.2.9. Неше тәсілмен он адамның ішінен төрт адамнан тұратын комиссия құруға болады?

9.2.10. 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 цифрларынан неше төрт таңбалы сан құрауға болады, егер әрбір цифр бұл санның құрамына бір рет қана енетін болса?

9.2.11. Орыс, ағылшын,француз,неміс тілдерінің кез келгенінен кез келген осы төрт тілдің біріне аударма жасау үшін қанша словарь қажет?

9.2.12. Жәшікте 10 деталь бар. Неше тәсілмен екі деталь таңдап алуға болады?

9.2.13. n- бұрышты көпбұрыштың диагональдарының санын есепте

9.2.14. 20 адамнан тұратын топты неше тәсілмен 10 адамнан тұратын екі топқа бөлуге болады?

9.2.15. 1,2,3,5,7,11,13 сандарынан неше әртүрлі дұрыс бөлшек құрауға болады?

9.2.16. 15 адамнан тұратын топты екі топқа бөлу қажет: бірінің құрамында-6, екіншісінің құрамында-9 адам болатындай. Бұны неше тәсілмен жүзеге асыруға болады?

9.2.17. Кеңістікте кез келген төртеуі бір жазықтықта жатпайтын жеті нүкте берілген. Осы жеті нүкте арқылы қанша әртүрлі жазықтық жүргізуге болады?

9.2.18. Он спортсменнің ішінде екеуі жүлделі орынға ие болған спортсмендер. Осы екі жеңімпаз құрамында болатындай төрт спортсменнен тұратын команданы неше тәсілмен құруға болады?

9.2.19. 0,1,2 цифрларынан неше әртүрлі натурал сандар құрауға болады, егер әрбір цифр бұл санның құрамына бір рет қана енетін болса.

9.2.20. Дүкенде 5 сорттан тұратын конфет және 4 сорттан тұратын печенье бар. Бір сорттан тұратын конфет пен бір сорттан тұратын печеньені неше тәсілмен сатып алуға болады?

9.2.21. Колхоз басқармасына сайланған 11 адамнан колхоз бастығы мен екі орынбасарын және хатшысын (басқарма мүшелерінің әрқайсысының сайлану мүмкіндігі бірдей деп) неше тәсілмен сайлауға болады?

9.2.22. Жатақханада 25 оқушы тұрады. Үш оқушыны кезекші етіп неше тәсілмен қоюға болады.

9.2.23. Есіктің кодының нөмірі 3 цифрдан тұрады. Кодтың нөмірін білмейтін бейтаныс адам үш цифрдан тұратын комбинацияларды ойша терді. Бейтаныс адам барлығы қанша нөмір тереді? (Есіктің кодын тапса да, барлық үш цифрдан тұратын комбинацияларды теріп біткенше жалғастыра береді).

9.2.24. Кітапхана сөресінде математикадан 16 кітап, химиядан 10 кітап және биологиядан 7 кітап бар. Әр түрінен бір-бір кітаптан 3 кітапты неше тәсілмен алуға болады?

9.2.25. 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 цифрларынан бірінші орында 2 цифры тұратын, ал келесі орындарда 2-ден өзге кез келген цифр тұратындай етіп бес таңбалы телефон нөмірлерін неше тәсілмен құрастыруға болады?

9.2.26. 0, 1, 3, 5, 7 цифрларынан 5-ке бөлінетін төрт таңбалы неше сан құрастыруға болады? (әр санда бірдей цифрлар енбейтін болса)

9.2.27. Фортепьяно үйірмесіне - 10 адам, көркем сөз үйірмесіне- 15, вокал үйірмесіне – 12 және фото үйірмесіне 20 адам қатысады. Мәнерлеп оқитын 4 адам, үш пианист, бес әнші және бір фотографтан тұратын бригаданы неше тәсілмен құрастыруға болады?

9.2.28. 10 теннисші әйел мен 6 теннисші ер адамдардан аралас 4 пар (екі әйел адам мен екі ер адамнан тұратын) құрылған. Мұны неше тәсілмен орындауға болады?

9.2.29. Лифт он қабаттың әрқайсысына тоқтайды. Лифт кабинасында тұрған 8 адам сол аялдамаларда неше тәсілмен шығуы мүмкін?

9.2.30. Автомобиль тіркемесінің нөмірі екі әріп пен төрт цифрдан тұрады. 30 әріп пен 10 цифрды пайдаланып неше нөмір құрастыруға болады?

9.3. Оқиғалардың ықтималдығының формуласын қолданып, төмендегі есептерді шығар:

9.3.1. Жәшікте 1-ден 6-ға дейін нөмірленген шарлар бар. Жәшіктен екі шар алынды. Алынған шарлардың нөмірі а)жұп болу; б)біреуі жұп, біреуі тақ болу ықтималдығын табыңыз.

9.3.2. Екі ойын кубигі лақтырылған. Келесі оқиғалардың орындалу ықтималдығын табыңыз: а) түскен ұпайлардың қосындысы 9; б)түскен ұпайлардың қосындысы 7, ал көбейтіндісі 10.

9.3.3. Қорапта 3 ақ, 8 қызыл және 6 жасыл шарлар бар. Қораптағы шарлар жақсылап араластырылған. Жәшіктен кез келген ретпен үш шар алынды. Алынған шарлардың а)түрлі-түсті (қызыл немесе жасыл) болу; б)біреуі ақ, біреуі қызыл, біреуі жасыл болу ықтималдығын табыңыз.

9.3.4.Монета екі рет лақтырылған. Тым болмағанда бір рет «герб» жағының түсу ықтималдығын табыңыз.

9.3.5. Математика емтиханына 40 билет дайындалды және олар 1-ден 40-қа дейін нөмірленген. Емтихан кезінде студент алған билеттің нөмірі а) жұп сан болу; б) 6-ға еселік сан болу; в) 41 саны болу ықтималдықтарын табыңыз.

9.3.6. Жәшікте 1-ден 5-ке дейін нөмірленген кубиктер бар. Жәшіктен кубиктер бір-бірден алынып, стол үстіне алынған ретпен қойылды.

Қойылған кубиктердің нөмірі өсу ретімен орналасу ықтималдығын табыңыз.

9.3.7. Жәшіктерді тасу кезінде ішінде 6 стандартты, 8 стандартты емес деталы бар жәшіктен төрт деталь жоғалды. Жоғалған детальдардың а)стандартты; б) үшеуі стандартты, біреуі стандартты емес болу ықтималдығын табыңыз.

9.3.8. 0,1,2,3 цифрлары жазылған карточалар жақсылап араластырылған. Бір-бірден суырып алынып, алынған ретпен столға қойылды. Стол үстінде 1203 саны пайда болу ықтималдығын табыңыз.

9.3.9. Тоғыз қабатты үйге 4 адам кірді. Бұл адамдардың әрқайсысы әр түрлі қабатта түсу ықтималдығын табыңыз.

9.3.10. Кітаптың ортасына кез келген бетке белгі салынған. Ойын шарты бойынша оқушы осы беттің нөмірін табу қажет. Оқушы беттің нөмірін ойша жорамалдап айтты. Беттің нөмірі үш таңбалы сан екені белгілі деп, айтылған санның кітап бетінің нөмірі болу ықтималдығын табыңыз.

9.3.11. Топта 19 студент бар, оның төртеуі «өте жақсыға» оқитындар. Тізім бойынша сегіз студент демалыс орнына демалуға жіберілді. Демалуға жіберілген студенттердің екеуі «өте жақсыға» оқитындар болу ықтималдығын табыңыздар.

9.3.12. Абонент телефон нөмірін теру кезінде соңғы үш нөмірді ұмытып қалып, бұл нөмірді ойша терді. Терілген нөмірдің абонентке қажетті нөмір болу ықтималдығын табыңыз.

9.3.13. Цехта 9 ер адам, 5 әйел адам жұмыс істейді. Кез келген ретпен алты адам қара жұмысқа жіберілді. Қара жұмысқа жіберілген адамдардағы ер адам мен әйел адамдардың саны тең болу ықтималдығын табыңыз.

9.3.14. Екі ойын сүйегі лақтырылды. Түскен ұпайлардың қосындысы жетіге тең екені белгілі болса, көбейтіндісі алты болу ықтималдығын табыңыз.

9.3.15. Телефон анықтағышынан алынған кез келген нөмір 3 цифрдан құрылған. Мұның цифрларының әр түрлі болу ықтималдығын табыңыз.

9.3.16. Карточкаға жазылған а,а,а,қ,к,с,н,т,з әріптерін әбден араластырып алып: а) қатарынан тізіп қойғанда «қазақстан» сөзінің шығу ықтималдығын; б)бес әріптен тізіп қойғанда «қазақ» сөзінің шығу ықтималдығын табыңыз.

9.3.17. Үш монетті лақтырғанда екеуінің тиын жағымен түсу ықтималдығын табыңыз.

9.3.18. Жәшікте 55 жарамды, 39 жарамсыз деталь бар. Бақылаушы кез келген 8 детальды алып тексереді. Алынған детальдардың а)барлығы жарамсыз болу; б) алтауы жарамды, екеуі жарамсыз болу ықтималдығын табыңыз.

9.3.19.Конверттегі 60 фотосуреттің ішіндегі екеуі іздеуде. Конверттен кез келген ретпен 5 фото алынды. Алынған фотолардың ішінде іздеудегі екі адамның фотосуреті болу ықтималдығын табыңыз.

9.3.20.Оқу залында ықтималдықтар теориясынан 8 оқулық бар, оның үшеуі қапталған. Кітапханашы ықтималдықтар теориясының кез келген екі оқулығын алды. Алынған оқулықтың екеуі де қапталған болу ықтималдығын табыңыз.

9.3.21.Кітапханашы сөреге үш томнан тұратын «Абай жолы» романын кез келген ретпен қойды. Қойылған кітаптардың том нөмірі бойынша өсу ретімен орналасу ықтималдығын табыңыз

9.3.22. Бес карточкада А, Қ, Н, Ы, С әріптері жазылып, жақсылап араластырылған. Студент карточкаларды бір-бірден алып, алынған ретпен столға қойды. Қойылған ретте «СЫНАҚ» сөзінің шығу ықтималдығын табыңыз.

9.3.23. Абонент телефонның алғашқы төрт нөмірін ұмытып қалып, телефон нөмірін ойша терді. Абоненттің қажетті нөмірге түсу ықтималдығын тап.

9.3.24.Жәшікте 8 кубик бар және олар бірден сегізге дейін нөмірленген. Жәшіктен кубиктер бір-бірден алынып, алыну реті бойынша столға қойылды. Кубиктердің кему реті бойынша орналасу ықтималдығын тап.

9.3.25. Жиырма емтихан билетінің әрқайсысында екі-екіден сұрақтар бар және билеттегі сұрақтар қайталанбаған. Студент емтихан билетінің отыз төрт сұрағының ғана жауабын біледі. Студент емтиханда алған билетке жауап бере алу ықтималдығын тап.

9.3.26. Сегіз қабатты үйдің лифтысына үш адам отырды. Олардың әрқайсысы бір-біріне тәуелсіз кез келген қабатта түсе алады (екінші қабаттан бастап). Олардың әртүрлі қабаттарда түсу ықтималдығын тап.

9.3.27. Жәшікте 6 қара, 5 ақ және 3 көк шарлар алынды. Жәшіктен қарамай үш шар алынды. Алынған шарлардың біреуі қара, біреуі ақ және біреуі көк болу ықтималдығын тап.

9.3.28. Телефон нөмірі төрт цифрдан тұрады. Телефон нөмірінің цифрларының әртүрлі болу ықтималдығын тап.

9.3.29. Алты карточкада бірден алтыға дейінгі сандар жазылған. Алынған кез келген екі карточкада жазылған цифрлардың қосындысы оннан кем болмау ықтималдығын тап.

9.3.30. Абонент телефон нөмірін тергенде алғашқы төрт цифрын ұмытып қалып, ойша терді. Қажетті нөмірге түсу ықтималдығын тап.

9.4. Ықтималдықтарды қосу немесе көбейту теоремаларын қолданып келесі есептерді шығарыңыз:

9.4.1. Топта 12 ер студент және 6 қыз студент бар. Университет кезекшілігіне кез келген 8 студент алынды. Кезекші студенттердің тым болмағанда 4-еуі қыз студент болу ықтималдығын табыңыз.

9.4.2. 50 лотерея билетінің 5-еуі ұтыс билеті. Осы лотерея билетнің ішінен оқушы қарамай суырып алынған, 3 билеттің тым болмағанда 1-еуі ұтыс билеті болу ықтималдығын тап.

9.4.3. Екі адам кезектесіп монета лақтырады. Қайсысында 1-ші «герб» түссе, сол жеңіс иесі. Ойынның екінші ойыншының екінші лақтырысынан ерте бітпеу ықтималдығын табыңыз.

9.4.4. Жәшікте 50 деталь бар және оның бесеуі жарамсыз. Осы 50 детальдан алынған 30 детальдың жарамсызы бірден артық болмау ықтималдығын тап.

9.4.5. Екі станок бір-біріне тәуелсіз жұмыс істейді. Белгілі бір t уақытта бірінші станоктың бұзылмай жұмыс істеу ықтималдығы $p_1=0,9$, ал екіншісінің бұл ықтималдығы $p_2=0,2$. Осы белгілі t уақытта екі станоктың да бұзылмай жұмыс істеу ықтималдығын тап.

9.4.6. Ойын кубигі үш рет лақтырылған Біріниші лақтырыста кубикте жұп саның, екінші лақтырыста кубикте «5» санының, ал үшінші лақтырыста кубикте «3» - ке еселі санның шығу ықтималдығын тап.

9.4.7. Қорапта 9 қызыл, 7 ақ және 8 көк шарлар бар. Осы қораптан кезекпен бір-бірден 3 шар алынды. Алынған шардың алғашқы екеуі қызыл, ал үшіншісі көк болу ықтималдығын тап.

9.4.8. Детальдың жарамсыз болып жасалынуы детальды жасаудың режимінің бұзылуынан болу ықтималдығы – 0,03; ал станоктың ақаулығынан болу ықтималдығы – 0,07. Жарамсыз деталь жасап шығару ықтималдығын тап.

9.4.9. Колоквиум тапсыру үшін студент оқытушының қойған 3 сұрағының тым болмағанда екеуіне жауап беру қажет. Студент берілген барлық 40 сұрақтың 8 сұрағының жауабын білмейді. Студенттің коллоквиум тапсырып шығу ықтималдығын тап.

9.4.10. Кинотеатрдың кассасында 14-ші қатардан 6 билет, ал 8-ші қатардан 9 билет қалды. Касса алдында кезекте тұрған 4 көрерменің, алғашқы екеуі 14-ші қатардан, соңғы екеуі 8-ші қатардан билет алу ықтималдығын тап.

9.4.11. Екі партияда сәйкесінше 30% және 85% жоғарғы сапалы заттар бар. Екі партиядан бір-бірден кез-келген екі зат алынды. Алынған заттардың:

1) тым болмағанда біреуі жоғары сапалы
2) екеуі де жоғары сапалы
3) біреуі ғана жоғары сапалы

болу ықтималдығын тап.

9.4.12. Бір топтан 8 студент диплом жұмысын өткізді, оның ішіндегі 3-еуінің жұмысы тақырыбына сай емес. Комиссия мүшелері кез келген 4 диплом жұмысын тексеруге алды. Алынған 4 жұмыстың екеуі тақырыбына сай емес жұмыс болу ықтималдығын тап.

9.4.13. Монетаны лақтырғанда тым болмағанда 1 рет «герб» жағында түсу ықтималдығы 0,875-тен үлкен болу үшін монетаны қанша рет лақтыру қажет?

9.4.14. Екі адам кезектесіп монета лақтырады. Қайсысында 1-ші «герб» түссе, сол жеңіс иесі. Ойынның екінші ойыншының екінші лақтырысынан ерте бітпеу ықтималдығын табыңыз.

9.4.15. Нысанаға үш мерген 1-1-ден оқ атты және олардың 1-1-іне оқ атуы тәуелсіз. Бірінші мергеннің оғының нысанаға тию ықтималдығы – 0,75; екіншісінің бұл ықтималдығы – 0,5; ал үшіншісінің бұл ықтималдығы – 0,6. Мына оқиғаның ықтималдығын тап:

а) тек бір ғана мергеннің оғы нысанаға тиді

б) тым болмағанда 1 мергеннің оғы нысанаға тиді

9.4.16. Күні бойы жұмыс істейтін станок 3 бөлшектен тұрады. Бұлардың әрқайсысы бір -біріне байланыссыз-ақ істен шығып қалуы мүмкін. Тым болмағанда біреуі істен шықса, станок жұмыс істемейді. Бірінші станоктың күні бойы үзіліссіз жұмыс істеу ықтималдығы – 0,9; екіншісікі – 0,95; ал үшіншісінікі – 0,8. Күні бойы станоктың үзіліссіз жұмыс істеу ықтималдығын тап.

9.4.17. Телефон нөмері 6 цифрдан тұрады және оның әр түрлі екені белгілі болса, оның соңғы цифры 523 болу ықтималдығын тап.

9.4.18. Студент «жоғары математика» пәнінен емтиханды «өте жақсы» деген бағаға тапсыру ықтималдығы – 0,3; ал экономикалық теория пәнінен бұл бағаны алу ықтималдығы – 0,85.

Мына ықтималдықты тап:

1) екі емтиханды да «өте жақсыға» тапсыру

2) тым болмағанда бір емтиханды «өте жақсыға» тапсыру.

9.4.19. Кәсіпорында шығарылытын бұйымның 2,5%-і жарамсыз бұйымдар. Жарамсыз емес, яғни, жарамды бұйымдардың ішіндегілерінің 60%-і бірінші сорты бұйымдар. Кәсіпорыннан кез келген бір бұйымды алғанда, оның бірінші сортты болу ықтималдығын тап.

9.4.20. Нысанаға екі мерген кезектесіп екі-екіден оқ атты. Біріншісінің нысанаға тигізу ықтималдығы – 0,7 ал екіншісінікі –0,6 Нысанаға кімнің оғы 1-ші тисе сол жүлде алу ықтималдығын тап.

9.4.21. Екі ойыншы нысанаға оқ атты. Бірінші нысанаға тию ықтималдығы – 0,1; ал екіншісінікі – 0,4. Нысанаға оқ тигенде ойын тоқтайды. Барлығы екі немесе үш рет оқ атылу ықтималдығын тап.

9.4.22. Кесінді тең екі бөлікке бөлінген және кесіндіге екі нүкте лақтырылған. Лақтырылған нүктелердің кесіндінің әр бөліктеріне түсу ықтималдығын тап, егер нүкте кесіндіге түсу ықтималдығы кесінді ұзындығына пропорционал болса және оның орналасуына тәуелсіз болса.

9.4.23. Белгілі бір күні жел соғу ықтималдығы –0,3. Ал осы күні жел болса жаңбыр жауу ықтималдығы –0,4; ал жел болмаса жаңбыр жауу ықтималдығы –0,7. Осы күні жаңбыр жауу ықтималдығын тап.

9.4.24. Емтихан тапсыратын 3 студент бар, олар 1-1-ден кез-келген рет бойынша комиссия мүшелерінің алдына шығарылды. Шақырылған студенттердің 1-шісі Сидоров, екіншісі Антроров, ал 3-шісі Максименко болу ықтималдығын тап.

9.4.25. Электр сымында тоқтың 3 элементі тізбектей жалғанған және олар бір-біріне тәуелсіз жұмыс істейді. Бірінші элементтің белгілі бір уақыт арағында жарамсыз болу ықтималдығы – 0,8; екінші элементтікі –

0,6; ал үшінші элементтікі – 0,3 Электр сымында тоқ болмау ықтималдығын тап.

9.4.26. Жәшікте алты шар бар: бірден алтыға дейін нөмерленген. Бір-бірден кез-келген 3 шар алынды. Алынған шарлардың сәйкесінше 1-ші; 2-ші; 3-ші нөмерлі болу ықтималдығын тап, егер

а) алынған шарлар жәшікке қайта салынса

б) алынған шарлар жәшікке салынбаса

9.4.27. Көпірді бұзу үшін бір ғана бомба жеткілікті. Көпірге 3 бомба лақтырылды: біріншісінің тию ықтималдығы – 0,7; екіншісінікі – 0,2; үшіншісінікі – 0,4. Көпірдің бұзылу ықтималдығын тап.

9.4.28. Екі қорапқа шарлар салынған. 1-ші қорапта 3 қызыл, 2 ақ, 1 көк және 2-ші қорапта 6 қызыл, 3 ақ, 2 көк шарлар бар. Қарамай әр қораптан бір-бірден шарлар алынды. Алынған шарлардың әрқайсысының ақ болу ықтималдығын тап.

9.4.29. Нысанаға атылған 3 оқтың тым болмағанда бір рет тию ықтималдығы – 0,784. Бір рет тию ықтималдығын тап.

9.4.30. Жәшікте 8 зат бар және оның 3-уі жоғарғы сапалы Жәшіктен қарамай жоғарғы сапалы зат шыққанша бір-бірден зат алынды. Бұл процесстің 3-реттен артық болмау ықтималдығын тап.

9.5. Геометриялық ықтималдық формулаларын қолданып, келесі есептерді шығар:

9.5.1. [0;2] кесіндісінен екі сан алынған. Олардың қосындысы 1-ден үлкен, ал көбейтіндісі 1-ден кіші болу ықтималдығын тап.

9.5.2. Радиусы 5 см дөңгелектің ішіне қабырғасы 2 см болатын квадрат орналасқан. Лақтырылған нүктенің квадратқа түспеу ықтималдығын тап.

9.5.3. Ұзындығы 6 см болатын кесіндіде екі нүкте орналасқан. Осы нүктелердің ара қашықтығы 3-тен аспау ықтималдығын тап.

9.5.4. Радиусы 3 см шеңберге тең қабырғалы үшбұрыш іштей сызылған. Шеңбердің ішіне лақтырылған нүктенің үшбұрышқа түсу ықтималдығын тап.

9.5.5. Дөңгелек саны жұп болатын бірдей секторларға бөлінген және секторлар ақ, қара болып кезектесіп боялған. Дөңгелекке лақтырылған нүктенің ақ секторға түсу ықтималдығын тап.

9.5.6. Екі адам сағат 10.00 мен 11.00 арасында кезігуге келісті. Алғаш келгені екіншісін 20 минут тосады да, кете береді. Егер олардың кездесуге келуі бір-біріне тәуелсіз болса, олардың кездеспеу ықтималдығын тап.

9.5.7. Радиустары 12 және 7 см болатын екі концентрлік шеңберлер берілген. Үлкен дөңгелекке лақтырылған нүктенің екі шеңбер арқылы жасалған сақинаға түсу ықтималдығын тап.

9.5.8. Қабырғасы 4 см болатын тең қабырғалы үшбұрышқа шеңбер сырттай сызылған. Осы шеңбердің ішіне 4 нүкте лақтырылған,

лақтырылған 4 нүктенің алғашқысы үшбұрыштың ішіне, ал қалған 3-еуі үшбұрыштың сыртына түсу ықтималдығын тап.

9.5.9. Әрбір клеткасының ұзындығы 16 см болатын шексіз шахмат тақтасына радиусы 5 см болатын монета лақтырылған. Монетаның бір клетка ішіне толығымен түсу ықтималдығын тап.

9.5.10. Радиустары 10 см және 8 см болатын концентрлік шеңберлер сақина жасайды. Үлкен шеңберге лақтырылған нүктенің сақинаға түсу ықтималдығын тап.

9.5.11. Жазықтық ара қашықтықтары бір-бірінен 8 см болатын параллель түзулермен бөлінген. Жазықтыққа лақтырылған радиусы 2 см болатын монетаның осы түзулердің бірде-біреуін қимау ықтималдығын тап. Егер нүктенің кесіндіге түсу ықтималдығы кесіндінің ұзындығына пропорционал және орналасуына тәуелсіз болса.

9.5.12. Радиусы 10 см болатын шеңбердің ішіне радиустары 3 см және 2 см болатын қиылыспайтын шеңберлер орналастырылған. Үлкен шеңбер ішіне лақтырылған нүктенің кіші шеңберлердің бірінің ішіне түсу ықтималдығын тап.

9.5.13. Қабырғасы 12 см болатын квадратқа шеңбер іштей сызылған. Квадратқа лақтырылған нүкте шеңберге түспеу ықтималдығын тап.

9.5.14. АВ кесіндісінің ұзындығы 8 см. Кесіндіге кез келген екі нүкте қойылды. Сонда пайда болған үш бөліктен үшбұрыш құралу ықтималдығын тап.

9.5.15. Екі пароходтың келу уақыттары бір-біріне тәуелсіз және бір тәуліктің ішіндегі келу уақыттары тең мүмкіндікті. Бірінші пароходтың жағада тұру уақыты 3 сағат, ал екіншісінікі 4 сағат болса, онда пароходтың біреуінің жағада тоқтайтын орынды екіншісінің босатуын тосу ықтималдығын тап.

9.5.16. Екі концентрлі шеңберлер берілген, радиустары сәйкесінше 4 және 3 см. Үлкен шеңберге А және В екі нүкте лақтырылған. АВ кесіндісінің кіші шеңберді қимау ықтималдығын тап.

9.5.17. Бес кесінді берілген, ұзындықтары сәйкесінше 2, 4, 6, 8, 10 бірлік. Алынған кез келген үш кесіндіден үшбұрыш құралыну ықтималдығын тап.

9.5.18. Екі студент сағат 11.00 мен 12.00 аралығында кезігуге келісті. Бірінші студент бірінші келсе екіншісін 10 минут тосады да, одан кейін кете береді; ал екіншісі бірінші келсе бірінші студентті 15 минут тосқан соң жүре береді. Екі студенттің берілген уақыт аралығында келу жағдайлары бір-біріне тәуелсіз болса, олардың кездесу ықтималдығын тап.

9.5.19. Ұзындығы 4 см болатын кесінді кез келген жағдайда үш бөлікке бөлінген. Осы үш бөліктен үшбұрыш құралу ықтималдығын тап.

9.5.20. Радиусы 6 см шеңберге квадрат іштей сызылған. Шеңбер ішіне лақтырылған нүктенің квадратқа түсу ықтималдығын тап.

9.5.21. Радиусы 6 см болатын шеңберге екі қиылыспайтын радиустары сәйкесінше 3 см және 1 см болатын екі шеңбер іштей сызылған. Үлкен дөңгелекке лақтырылған нүктенің кіші дөңгелектердің бірде-біреуіне түспеу ықтималдығын тап.

9.5.22. Ұзындығы 4 см болатын АВ кесіндісіне екі нүкте лақтырылған: L және M. L нүктесі M нүктесіне қарағанда A нүктесіне жақын орналасу ықтималдығын тап.

9.5.23. [0; 5] аралығынан екі сан алынған. Олардың қосындысы екіден кем емес, бестен артық емес болу ықтималдығын тап.

9.5.24. Радиусы R=4 см болатын шеңберге квадрат іштей сызылған. Шеңбердің ішіне лақтырылған нүктенің квадратқа түспеу ықтималдығын тап.

9.5.25. Екі студент сағат 13.00 мен 13.30 аралығында кездесетін болып келісті. Алғаш келгені келесісін 10 мин тосады да, кете береді. Егер олардың кездесуге келуі бір-біріне тәуелсіз болса, олардың кездесу ықтималдығын тап.

9.5.26. Радиусы 3 см болатын дөңгелекке лақтырылған нүктенің центрлік бұрышы 120^0 болатын секторға түсу ықтималдығын тап.

9.5.27. Ұзындығы 9 см болатын кесіндінің ішіне ұзындығы 3 см болатын кесінді орналастырылған. Үлкен кесіндіге лақтырылған нүкте кіші кесіндіге түсу ықтималдығын тап.

9.5.28. Квадратқа үшбұрыш іштей сызылған. Үшбұрыштың табаны квадраттың бір қабырғасында, ал бір төбесі квадраттың қарама-қарсы қабырғасында жатыр. Квадратқа лақтырылған нүктенің үшбұрыш ішіне түсу ықтималдығын тап.

9.5.29. Қабырғасы 3 см болатын квадратқа лақтырылған нүктенің квадратқа іштей сызылған шеңбер ішіне түсу ықтималдығын тап.

9.5.30. Екі адам сағат 10.00 мен 10.40 арасында кезігуге келісті. Алғаш келгені екіншісін 10 минут тосады да кете береді. Егер екі адамның берілген уақыт аралығында келу жағдайлары бір-біріне тәуелсіз болса, олардың кездесу ықтималдығын тап.

9.6.Ықтималдықтардың толық формуласы мен Бейес формуласын қолданып есепте

9.6.1. Дүкенге 3 заводтан заттар әкеліп түсірді, 1-ші завод барлық заттың 20%-ін, 2-ші завод барлық заттың 50%-ін, ал 3-ші завод барлық заттың 30%-ін әкелді: 1-ші заводтың әкелген заттарының 5%-і, 2-ші заводтың 15%-і, ал 3-нің 4%-і жарамсыз заттар. Тұтынушы кез келген 1 зат сатып алды. Алынған заттың жарамды болу ықтималдығын тап.

9.6.2. Бірінші жәшікте 6 ақ және 3 қара бар, ал 2-ші жәшікте 3 ақ, 4 қара шар бар. Бірінші жәшіктен 2-ші жәшікке 3 шар салынды, одан кейін екінші жәшіктен 2 шар алынды. Алынған шарлардың 1-шісі ақ, екіншісі қара болу ықтималдығын тап.

9.6.3. Үш мерген бір-бірден оқ атты және оның екеуі нысанаға тиді. Егер бірінші, екінші және үшінші мергендердің нысанаға тигізу ықтималдықтары сәйкесінше 0,6; 0,5; 0,4 болса, онда үшінші мергеннің оғының нысанаға тию ықтималдығын тап.

9.6.4. Барлық ер адамдардың 10%, ал әйел адамдардың 20%-і «К» ауруымен ауыратыны белгілі. Медициналық тексеруге келген ер адамдар мен әйел адамдар саны бірдей. Кез келген бір адам дәрігерге шақырылды. Осы адамның «К» ауыруымен ауыратын адам болу ықтималдығын тап.

9.6.5. Екі цехта біртекті детальдар жасайды. Бірінші цехтың жасаған детальдарының 20%-і, 2-ші цехтың жасаған детальдарының 30%-і жарамсыз детальдар. Бірінші цехтан 3 детальды, 2-цехтан 4 детальды тексеру үшін қорапқа салып алып кетті. Ол қажетті жерге жеткенше қораптың ішіндегі детальдар жақсылап араласты. Осы қораптан алынған кез келген детальдың жарамсыз болу ықтималдығын тап.

9.6.6. Үлкен жүк машинасы жолға шықты. Оның жолда жанармайы біту; дөңгелегі жарылу немесе басқа ақау табылуы сәйкесінше 2:6:2 қатынасындай және өзара тәуелсіз. Осы жолда жанармайы біту ықтималдығы – 0,3; ал дөңгелегі жарылу ықтималдығы – 0,5; басқа ақау табылу ықтималдығы – 0,2-ге тең. Жолда машинаның бұзылу ықтималдығын тап.

9.6.7. Спорт залындағы жәшікте 15 доп бар және оның сегізі жаңа доптар. Ойынға кез келген екі доп алынды және бірінші ойыннан кейін бұл доптар орнына қайта салынды. Екінші ойынға тағы екі доп алынды. Екінші ойынға тағы екі доп алынды. Екінші ойынның жаңа доптармен ойналу ықтималдығын тап.

9.6.8. Үш жәшіктің әрқайсысында 10 шардан бар. Бірінші, екінші, үшінші жәшіктерде сәйкесінше 5; 7 және 4 ақ шарлар. Бірінші жәшіктен бір шар алынып екінші жәшікке салынды, одан кейін екінші жәшіктен бір шар алынып үшінші жәшікке салынды. Үшінші жәшіктен алынған шар ақ болып шықты. Бірінші жәшіктен екіншіге ақ шар, ал екіншіден үшіншіге басқа түсті шар салыну ықтималдығын тап.

9.6.9. Бақылаудағы құрал заттардың бұзылуын тексерді. Заттың бұзылуы екі бөлігінің бұзылуына байланысты:А және В. Затың А бөлігінің бұзылу ықтималдығы 0,65 тең, ал В бөлігінің бұзылу ықтималдығы 0,35 тең. Құрал заттың А бөлігінің бұзылғандығын табу ықтималдығы 0,9; ал В бөлігінің бұзылғандығын табу ықтималдығы 0,8. Құрал заттың бұзылғандығын анықтады. Заттың А бөлігінің бұзылуынан бұзылған болу ықтималдығын тап.

9.6.10. Үш мергеннің біреуі нысанаға оқ атты және оқ нысанаға тиді. Бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,3; екінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,7; үшінші мергеннің бұл ықтималдығы 0,4. Нысанаға оқ атушы екінші мерген болу ықтималдығын тап.

9.6.11. Партиядағы 50 детальдың ішіндегі жарамсыз детальдар саны екіден аспайды және жарамсыз детальдың жәшікте болуының барлық мүмкін мәндерінің (0; 1; 2) мүмкіндіктері бірдей. Алынған 5 детальдың барлығы жарамды болғаны белгілі, партияда қалған детальдың барлығы жарамды болу ықтималдығын тап.

9.6.12. Ойын добын жасайтын бірінші автомат дүкендегі барлық доптың 40%-ін, екінші автомат 35%-ін, ал үшінші автомат 25%-ін жасайды. Бірінші автоматпен жасалған жарамсыз доптар саны 0,2%, ал екінші автомат үшін жарамсыз жасалған доптар саны 0,3%, ал үшіншісі үшін 0,5%. Дүкеннен сатып алынған кез келген бір доптың жарамсыз болу ықтималдығын тап.

9.6.13. Теміржол билетін алуға келген жолаушы 3 кассаны көреді. Оның қай кассаға жақындауы әр түрлі себептергебайланысты және бірінші кассаға жақындау ықтималдығы 0,3; екінші кассаға жақындау ықтималдығы 0,2; ал үшіншіге жақындау ықтималдығы 0,5. Ал бірінші кассадан қажетті билеттің жолаушының ала алу ықтималығы 0,8; екінші кассадан қажетті билеттің ала алу ықтималығы 0,5; үшінші кассадан қажетті билеттің ала алу ықтималығы 0,4. Жолаушы қажетті билетті алды. Оның билетті бірінші кассадан сатып алу ықтималдығын тап.

9.6.14. Ғылыми жұмысты жазуға 3 маман шақырылды. Бірінші маманның жұмысты уақытында сапалы орындау ықтималдығы 0,8; екіншінікі 0,9; ал үшіншінікі 0,6. Ғылыми жұмыс кез келген бір маманның істеуінен уақытында сапалы орындалып шықты. Егер жұмыс орындалу үшін мамандардың таңдалу ықтималдығы бірдей болса, онда осы жұмысты орындаған екінші маман болу ықтималдығын тап.

9.6.15. Заводта I цехтан жасалған 30%, II цехтан жасалған 45% және қалғандары III-ші цехтан жасалған заттар бар. I-ші цехтың жасаған детальдарының 20%-і, ал II-ші цехтың жасаған детальдарының 10%-і, ал III-нің 40%-і жарамсыз заттар. Заводтан кез келген бір деталь алынды. Алынған детальдың жарамсыз болу ықтималдығын тап.

9.6.16. Шарлар салынған үш жәшік бар. Бірінші жәшікте 4 ақ, 5 қара; екіншіде 5 ақ, 4 қара; ал үшіншіде 6 ақ шарлар бар. Бірінші жәшіктен екіншіге екі шар, одан кейін екінші жәшіктен бір шар алынып үшінші жәшікке салынды. Осыдан кейін үшінші жәшіктен алынған шардың қара болу ықтималдығын тап.

9.6.17. Бұйымның стандарттылығын 2 бақылаушы тексерді. Бұйымның бірінші бақылаушыға тап болу ықтималдығы 0,35; ал екіншіге тап болу ықтималдығы 0,75. Бірінші бақылаушының бұйымды үлгілі деп бағалау ықтималдығы үшін 0,7; ал екінші бақылаушы үшін бұл ықтималдық 0,8. Тексеру нәтижесінде бұйым үлгілі болып шықты. Бұйымды тексерген бірінші бақылаушы болу ықтималдығын тап.

9.6.18. Физикалық құрал екі режимде жұмыс істейді: қалыпты және қалыпты емес. Құрал барлық жағдайдың 90%-імен жұмыс істегенде оның қалыпты режимі байқалады, ал барлық жағдайдың 10%-імен жұмыс істегенде қалыпты емес режимі байқалады. Белгілі бір Т уақыт аралығында қалыпты режимдегі құралдың бұзылу ықтималдығы 0,1; ал қалыпты емес режимдегі құралдың бұзылу ықтималдығы 0,6. Осы Т уақыт аралығында құралдың бұзылу ықтималдығын тап.

9.6.19. Үш мергеннің нысанаға бір-бірден оқ атты және олардың нысанаға тигізу ықтималдықтары сәйкесінше: 0,8; 0,7 және 0,9.

а) кез келген бір мерген алаңға шақырылды, осы мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығын тап;

б) нысанаға бір оқ тигені белгілі, осы оқты атушы екінші мерген болу ықтималдығын тап.

9.6.20. Емтиханға ең соңында келген студент қалған 6 билеттің біреуін суырды. Оның осы билеттерге жауап беріп, «қанағаттанарлық» баға алу ықтималдықтары сәйкесінше 0,5; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 және 0,9. Студенттің емтиханды «қанағаттанарлық» бағаға тапсыру ықтималдығын тап.

9.6.21. Жәшікте 3 деталь бар және олардың тым болмағанда біреуі сапалы. Жәшіктен кез келген деталь алынды. Бастапқы жәшікте қандай деталь болу мүмкіндіктері өзара тең болса, онда алынған детальдың сапалы болу ықтималдығын тап.

9.6.22. Емтихан тапсыруға келген студенттердің бесеуі 40 емтихан билеттерінің 25 сұрағының жауабын біледі, оны 30 сұрақтың жауабын біледі, ал қалған он бесі 20 сұрақтың жауабын біледі. Емтиханға шақырылған кез келген студенттің емтиханда жауап бере алу ықтималдығын тап.

9.6.23. 10 студенттің үшеуінің берілген есепті шығара алу ықтималдығы – 0,8; бесеуінің бұл ықтималдығы – 0,9 ал қалғандарының бұл ықтималдығы – 0,7. Кез келген таңдап алынған бір студент есепті шығара алды. Бұл студент екінші топтан болу ықтималдығын тап.

9.6.24. Техосмотр өтуге келген өз автомобильдеріміздің саны шетел маркадағы автомобильдер санына қарағанда 3:2 қатынасындай. Өз автомобильдеріміздің техосмотр талонын ала алмау ықтималдығы 0,2; ал шетел маркадағы автомобиль үшін бұл ықтималдық 0,15. Кез келген техосмотр өтуге келген автомобильдің техосмотр талонын алу ықтималдығын тап.

9.6.25. Үш конвейердағы деталь жалпы бір заводқа түседі. Бірінші конвейердің жарамсыз зат жасап шығару ықтималдығы 0,1; екіншінің бұл ықтималдығы – 0,06; ал үшінші үшін бұл ықтималдық – 0,09. Конвейерлардың зат өндіру өнімділігі сәйкесінше 1:2:3. Заводтан алынған кез келген деталь жарамсыз болып шықты. Алынған детальдың екінші конвейерден болу ықтималдығын тап.

9.6.26. Сегіз студенттің екеуі «өте жақсыға» оқитындар, үшеуі «жақсыға», қалған үшеуі «орташа» оқитындар. Студенттердің біреуі емтиханға кіріп, «жақсы» деген баға алып шықты. Егер «өте жақсыға» оқитындардың «жақсы» баға алу ықтималдығы 0,6; «жақсыға» оқитындардың «жақсы» баға алуықтималдығы 0,7; ал «орташа» оқитындардың «жақсы» баға алу ықтималдығы 0,4 болса онда емтиханға кірген студент «өте жақсыға» оқитындардың біреуі болу ықтималдығын тап.

9.6.27. Автопарктегі автобустың оны «ЛАЗ» маркалы, ал қалған жиырмасы «ИКАРУС» маркалы. Жұмыс уақытында «ЛАЗ» маркалы автобустың сыну ықтималдығы – 0,2; ал «ИКАРУС» маркалы автобустың сыну ықтималдығы – 0,07 болса, онда автобустардың жұмыс уақытында сынбай жұмыс істеу ықтималдығын тап.

9.6.28. Төрт мергеннің біреуі нысанаға оқ атты. Нысанаға бірінші мергеннің тигізу ықтималдығы 0,7; екіншісінің тигізу ықтималдығы ықтималдығы 0,8, ал қалғандарының бұл ықтималдығы 0,4. Оқ нысанаға тиді. Атылған оқ үшінші мергеннің оғы болу ықтималдығын тап.

9.6.29. Олимпиадаға мектептердің математика пәндерінің мұғалімдері жиналды. Оның оны 1-ші разрядты, ал он бесі 2-ші разрядты мұғалімдер. Бірінші разрядты мұғалімдердің олимпиададан жоғарғы орын алу ықтималдығы – 0,2; ал екінші разрядтағы мұғалімдерінің олимпиададан жоғарғы орын алу ықтималдығы – 0,1. Кез келген бір мұғалім олимпиададан жоғарғы орын алды. Алынған мұғалімнің екінші разрядты мұғалім болу ықтималдығын тап.

9.6.30. Бірінші жәшікте 6 қара, 3 ақ; 2-ші жәшікте 5 қара, 4 ақ шарлар бар. Бірінші жәшіктен 2 шар алынып екінші жәшікке салынды. Одан кейін екінші жәшіктен бір шар алынды. Алынған шардың ақ болу ықтималдығын тап.

9.7. Бернулли, Лаплас және Пуассон формулаларын қолданып келесі есептерді шығар

9.7.1. Дүкенге 6 тұтынушы кірді. Егер әрқайсысының зат сатып алу ықтималдықтары бірдей және 0,7-ге тең болса, онда осы тұтынушылардың үшеуінің зат сатып алу ықтималдығын тап.

9.7.2. Барлығы 400 лабороториялық жұмыс жүргізілді. Оның әрқайсысының нәтижелі орындалу ықтималдығы 0,3. 252-ден 310-ға дейінгі лабороториялық жұмыстың нәтижелі болу ықтималдығын тап.

9.7.3. Дүкенге 8 тұтынушы кірді. Егер бір тұтынушының зат сатып алу ықтималдығы 0,8-ге тең болса, онда дүкенге кірген тұтынушылардың бесеуінің зат сатып алу ықтималдығын тап.

9.7.4. Ойын сүйегі 6480 рет лақтырылған. Қандай да бір ұпайдың 1065 пен 1140-тың арасында түсу ықтималдығын тап.

9.7.5. Нысанаға 10 оқ атылды және оның тию ықтималдығы 0,3.

а) Нысанаға тиюдің ықтималды санын және оның ықтималдығын тап.

б) Нысанаға 3 реттен артық оқ тию ықтималдығын тап.

9.7.6. Мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,55. 100 атыста мергеннің нысанаға 60-тан кем емес, 80-нен артық емес дәл тигізу ықтималдығын тап

9.7.7. Белгілі бір оқиғаның 200 тәуелсіз сынақтарда пайда болу ықтималдығы 0,4-ке нең. Оқиғаның пайда болуы 140 реттен аспау ықтималдығын тап.

9.7.8. Бір рет атылғанда оқтың нысанаға тимеу ықтималдығы 0,3. Нысанаға атылған 4 оқтың 3-тен көбі нысанаға тию ықтималдығын тап. Жауабын 0,01-ге дейін дөңгелекте.

9.7.9. Баскетболисттің белгілі бір аралықтан корзинаға доп түсіру ықтималдығы –0,7. Бес лақтырыста корзинаға үш реттен көп түсу ықтималдығын тап.

9.7.10. Жұмысшылар жасаған детальдардың 4%-і сапалы емес детальдар. Алынған 30 детальдың екеуінің сапалы болмау ықтималдығын тап.

9.7.11. Нысанаға оқтың тию ықтималдығы 0,8. Нысанаға атылған 4 отың:

а) тым болмағанеда біреуі;

б) үштен кемі;

в) бірден артық емесі нысанаға тию ықтималдығын тап.

9.7.12. Монета 6 рет лақтырылған. Герб жағының:

а) екі реттен артық емес;

б) 2 реттен артық түсу ықтималдығын тап.

9.7.13. Физикалық құралды сынау үшін 600 сынақ жүргізілді. Бір сынақта құралдың бұзылу ықтималдығы 0,4. 222-ден 252-ге дейінгі сынақта құралдың бұзылу ықтималдығын тап.

9.7.14. Бақылаушы 24 түрлі товарды тексеруден өткізді. Бақылау кезінде біз түрлі товардың сапалы болу ықтималдығы 0,4. Тексеруге алынған товарлардың жиырмасы сапалы болу ықтималдығын тап.

9.7.15. Ойын сүйегі 8 рет лақтырылды. Түскен ұпай саны тым болмағанда екі рет 3-ке еселі болу ықтималдығын тап.

9.7.16. [0;10] аралығына 4 нүкте лақтырылған. Лақтырылған нүктенің екеуі [3;5] аралығына түсу ықтималдығын тап.

9.7.17. Екі адам 6 партия шахмат ойнады. Біріншi адамның 1-ші партияда жеңу ықтималдығы - 0,4, біріншi адамның 2-ші партиядан артық ойында жеңіске жету ықтималдығын тап.

9.7.18. Бір лотерея билеттінің ұтысты болу ықтималдығы 0,005. Жүз билеті бар адамның тым болмағанда 2 билеті ұтыс билеті болу ықтималдығын тап.

9.7.19. Радиусы 5 см шеңберге квадрат іштей сызылған. Шеңбер ішіне лақтырылған 8 нүктенің үшеуі квадрат ішіне, екеуі 1 сегментке, ал үшеуі қалған 3 сегментке түсу ықтималдығын тап.

9.7.20. Байланыс станциясында 100 байланыс каналы бар. Берілген Т уақыт аралығында бір каналдың бос болу ықтималдығы – 0,2. Осы Т уақыт аралығында 18-ден 24 аралығында каналдардың бос болу ықтималдығын тап.

9.7.21. Фабрикадағы 10 000 станокта бшр тоқымашы жұмыс істейді. Белгілі бір уақыт аралығында жіптің үзілу ықтималдығы 0,0003. Осы уақыт аралығында 4 станокта жіп үзілу ықтималдығын тап.

9.7.22. Дүкенге 600 құмыра минералды су әкелді. Әкеле жатқанда бір құмыраның сыну ықтималдығы 0,005. Дүкенге әкелінген құмыралардың: а) тура екеуі;

б) екіден азы;

в) тым болмағанда біреуі сынған болу

ықтималдығын тап.

9.7.23. Монета 16 рет лақтырылды. «Герб» жағының

а) 4 рет;

б) тым болмағанда бір рет

түсу ықтималдықтарын тап.

9.7.24. Оқулық 90 000 экземпляр болып басылып шықты. Бір оқулықтың дұрыс қапталмаған болу ықтималдығы 0,0001 болса, оқулықтың бесеуі дұрыс қапталмаған болу ықтималдығын тап.

9.7.25. Кесіндіні тең қылып төрт бөлікке бөлген және кесіндіге 8 нүкте лақтырылған. Әр тең бөліктерге екі-екіден нүктеден түсу ықтималдығын тап. Нүктенің кесіндіге түсу ықтималдығы кесінді ұзындығына пропорционал және оның орналасуына тәуелсіз болса.

9.7.26. Қандай да бір А оқиғасының 210 тәуелсіз сынаудың арқасында пайда болу ықтималдығы тұрақты және р=0,6. А оқиғасының:

а) 90-нан кем емес және 150-ден артық емес;

б) 90-нан кем емес;

в) 89-дан артық емес

пайда болу ықтималдығын тап.

9.7.27. АВ кесіндісі, С нүктесі арқылы 3:1 қатынасындай бөлінген. АВ кесіндісіне 5 нүкте лақтырылған. Екі нүктенің АС кесіндісіне, ал қалған нүктелердің СВ кесіндісіне түсу ықтималдығын тап. Нүктенің кесіндіге түсу ықтималдығы кесінді ұзындығына пропорционал және оның орналасуына тәуелсіз болса.

9.7.28. Мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы – 0,65. Жүз атыста нысанаға 71-ден кем емес, 80-нен артық емес рет дәл тигізу оқиғасының ықтималдығын тап.

9.7.29. Кез келген абоненттің анықтама бюросына 1 сағатта телефон соғу ықтималдығы 0,005-ке тең. Телефон станциясында 800 абонент барю Бір сағатта 4 абоненттің телефон соғу ықтималдығын тап.

9.7.30. Жанұяда 7 бала бар. Осы балалардың ішінде:

а) 4 қыз бала болу;

б) 4-тен артық емес қыз бала болу

в) 4-тен артық емес 6-дан кем емес қыз бала болу

ықтималдығын тап.

9.8. Х дискретті кездейсоқ шамасы таблица түрінде берілген. Х кездейсоқ шамасының математикалық күтімін; дисперсиясын; орташа квадраттық ауытқуын; бірінші, екінші, үшінші және төртінші ретті теоретикалық және центрлік моментін; таралу заңдылығының ассиметриясы мен эксцессін тап. 0,01-ге дейін дөңгелекте.

9.8.1.

x	0,1	0,3	2,1	5	7	8
p	0,1	0,2	0,01	0,03	0,06	0,6

9.8.2.

X	2,6	2,8	3	3,1	3,3
p	0.01	0,11	0,19	0,09	0,6

9.8.3.

X	0,1	0,2	4,5	6	7,8
p	0,1	0,3	0,2	0,01	0,39

9.8.4.

X	8	8,3	8,5	9	9,3
p	0,2	0,04	0,06	0,3	0,4

9.8.5.

X	1,2	2,3	4,5	4,7	4,9	5,1	5,3
p	0,1	0,01	0,03	0,2	0,4	0,2	0,06

9.8.6.

X	1	3	4	4,5	5
p	0,2	0,6	0,1	0,21	0,79

9.8.7.

X	2,3	2,5	2,7	3	3,3
p	0,1	0,3	0,4	0,05	0,15

9.8.8.

X	1	1,3	1,5	1,7	1,9
p	0,23	0,03	0,04	0,35	0,35

9.8.9.

X	5,6	5,9	6,3	6,5	6,7
p	0,01	0,05	0,07	0,07	0,8

9.8.10.

X	8,2	8,7	9,1	9,4	9,5
p	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

9.8.11.

X	2,5	2,8	2,7	3	3,3
p	0,1	0,1	0,3	0,2	0,3

9.8.12.

X	3,2	3,3	3,5	3,7	3,9
p	0,01	0,03	0,62	0,04	0,3

9.8.13.

X	2,8	3,5	3,9	4	4,7	5
p	0,04	0,02	0,3	0,24	0,3	0,1

9.8.14.

X	1,2	1,7	2,1	2,3	2,5
p	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

9.8.15.

X	5,2	5,6	6	6,5	7
p	0,02	0,04	0,34	0,5	0,1

9.8.16.

X	10,1	10,2	10,3	11	12
p	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

9.8.17.

X	0,4	2,1	2,8	3	3,5
p	0,3	0,1	0,1	0,2	0,2

9.8.18.

X	2,7	3,2	3,9	4,5	5
p	0,02	0,25	0,1	0,45	0,18

9.8.19.

X	4,2	4,5	4,7	4,9	5,3
p	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

9.8.20.

X	8,2	8,3	8,6	8,9	9,4
p	0,02	0,12	0,01	0,45	0,4

9.8.21.

X	8,1	8,5	8,7	9,1	9,3
p	0,02	0,03	0,12	0,25	0,13

9.8.22.

X	2,9	3,5	3,7	3,9	4
p	0,01	0,11	0,38	0,2	0,4

9.8.23.

X	2,7	3,5	4	5	6
p	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3

9.8.24.

X	8,1	8,4	9	9,7	10,1
p	0,03	0,02	0,25	0,4	0,3

9.8.25.

X	5,2	5,3	5,8	6,2	6,5
p	0,08	0,01	0,25	0,35	0,31

9.8.26.

X	2,9	3,4	5	5,5	6
p	0,02	0,01	0,25	0,42	0,3

9.8.27.

X	7,3	7,5	7,8	8	8,5
p	0,04	0,35	0,17	0,34	0,1

9.8.28.

X	2,8	4,2	4,6	5	5,2
p	0,3	0,2	0,1	0,1	0,3

9.8.29.

X	2,8	3,3	3,5	3,7	3,9
p	0,09	0,11	0,05	0,45	0,3

9.8.30.

X	4,8	4,9	5	5,2	5,5
p	0,1	0,1	0,1	0,3	0,4

9.9. X үздіксіз шамасының таралу функциясы берілген. а) а коэффицентін ; таралу тығыздығын; математикалық күтімін; дисперсиясын; орташа квадраттық ауытқуын; ; бірінші, екінші, үшінші және төртінші ретті теоретикалық және центрлік моментін тап; б) X үздіксіз шамасының таралу функциясы мен таралу тығыздығының графигін сыз.

9.9.1.

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{егер } x \le 1 \\ 2 - a/x; \text{ егер } 1 < x \le 2 \\ 1, \text{ егер } x > 2 \end{cases}$$

9.9.2.

$$F(x)=\begin{cases} 0; \text{егер } x \le 0 \\ a \sin x, \text{ егер } 0 < x \le \pi/6 \\ 1, \text{егер } x > \pi/6 \end{cases}$$

9.9.3.

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{егер } x \le 0 \\ a\sqrt{x} \text{ егер } 0 < x \le 1 \\ 1, \text{егер } x > 1 \end{cases}$$

9.9.4.

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{егер } x \le \pi/4 \\ a \cos 2x, \text{ егер } \pi/4 < x \le \pi/2 \\ 1, \text{ егер } x > \pi/2 \end{cases}$$

9.9.5.

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{егер } x \le 0 \\ a \sin x/2; \text{егер } 0 < x \le \pi/3 \\ 1; \text{ егер } x > \pi/3 \end{cases}$$

9.9.6.

$$F(x)=\begin{cases} 0; \text{ егер } x \le 0 \\ \dfrac{a \cdot e^x}{2}; \text{ егер } 0 < x \le \ln 2 \\ 1, \text{ егер } x > \ln 2 \end{cases}$$

9.9.7.

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ егер } x \le \pi/4 \\ ax^3; \text{ егер } 0 < x \le 2 \\ 1; \text{ егер } x > 2 \end{cases}$$

9.9.8.

$$F(x)=\begin{cases} 0; \text{ егер } x \le 0 \\ a\, x^3, \text{ егер } 0 < x \le 3 \\ 1; \text{ егер } x > 3 \end{cases}$$

9.9.9.

$$F(x)=\begin{cases} 0; \text{ егер } x \le 1 \\ a \ln x, \text{ егер } 1 < x \le e \\ 1; \text{ егер } x > e \end{cases}$$

9.9.10.

$$F(x)=\begin{cases} 0; \text{ егер } x \le 1 \\ a \ln x/2; \text{ егер } 2 < x \le 2e \\ 1, \text{ егер } x > 2e \end{cases}$$

9.9.11.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ a\,(x+2)^2; \text{ егер } 0 < x \le 1 \\ 1; \text{ егер } x \ge 1 \end{cases}$$

9.9.12.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ a\,(x^2 + 2\,x), \text{ егер } 0 < x \le 1 \\ 1, \text{ егер } x \ge 1 \end{cases}$$

9.9.13.

$$F\,(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le -2 \\ a\,(x+1)^2, \text{ егер } -2 < x \le 1 \\ 1, \text{ егер } x \ge 1 \end{cases}$$

9. 9.14.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ ax^2, \text{ егер } 0 < x \le 5 \\ 1, \text{ егер } x \ge 5 \end{cases}$$

9.9.15.

$$F\,(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le -1 \\ a\text{-}x^3, \text{ егер } -1 < x \le 0 \\ 1, \text{ егер } x \ge 0 \end{cases}$$

9.9.16.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ a\,(x^2 + 5), \text{ егер } 0 < x \le 1 \\ 1, \text{ егер } x \ge 1 \end{cases}$$

9.9.17.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le -2 \\ a\,(x+1)^2, \text{ егер } -2 < x \le 2 \\ 1, \text{ егер } x \le 2 \end{cases}$$

9.9.18

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ a\,\dfrac{\sqrt{x}}{4}, \text{ егер } 0 < x \le 1 \\ 1; \text{ егер } x > 1 \end{cases}$$

9.9.19.

$$F(x) = \begin{cases} 0; \text{ егер } x \le 0 \\ ax^2; \text{ егер } 0 < x \le 4 \\ 1, \text{ егер } x > 4 \end{cases}$$

9.9.20.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ a \sin x/2, \text{ егер } 0 < x \le \pi/3 \\ 1, \text{ егер } x > \pi / 3 \end{cases}$$

9.9.21.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ a\,e^{x} - 1, \text{ егер } 0 < x \le \ln 2 \\ 1, \text{ егер } x > \ln 2 \end{cases}$$

9.9.22.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le -1 \\ (2x + 3a)x, \text{ егер } -1 < x \le 1 \\ 1, \text{ егер } x > 1 \end{cases}$$

9.9.23.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ a \sin x/3; \text{ егер } 0 < x \le \pi/6 \\ 1, \text{ егер } x > \pi/6 \end{cases}$$

9.9.24.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 3/4 \\ a/x - 3/x^2, \text{ егер } 3/4 < x \le 1 \\ 1, \text{ егер } x > 1 \end{cases}$$

9.9.25.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ ax^3, \text{ егер } 0 < x \le 3 \\ 1, \text{ егер } x > 3 \end{cases}$$

9.9.26.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ a\,(x^2/2 - 1), \text{ егер } 0 < x \le 2 \\ 1,. \text{ егер } x > 2 \end{cases}$$

9.9.27.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ a\,(x^2+x^3), \text{ егер } 2 < x \le 3 \\ 1,. \text{ егер } x > 3 \end{cases}$$

9.9.28.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ a \sin 3x, \text{ егер } 0 < x \le \pi/2 \\ 1, \text{ егер } x > \pi/2 \end{cases}$$

9.9.29.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le 0 \\ ax^2/3, \text{ егер } 0 < x \le 3 \\ 1,. \text{ егер } x > 3 \end{cases}$$

9.9.30.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \le -1 \\ 3x^2-ax\ , \text{ егер } -1 < x \le 1 \\ 1, \text{ егер } x > 1 \end{cases}$$

Есептер

1. A, B және C оқиғалары оқиғалардың толық тобын құрайтындығы белгілі болса, онда $B+AB+AC+BC+A\overline{B}+C\overline{B}$ өрнегі неге тең? Жауабы: 1+AC
2. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Түскен ұпай сандарының қосындысы оннан артық емес болу ықтималдығын тап. Жауабы: $\frac{19}{36}$

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.-М.:Физматгиз, 1962.
2. Гмурман В.Е.Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.-М.:Высшая школа, 1979.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей.-М.:Физматгиз,1961.
4. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. Учеб.пособие для втузов.-М.: Высшая школа,1971.
5. Ералиев С.Е. Ықтималдықтар теориясы және мат.статистика элементтері. Оқу құралы.-Алматы.:1996.
6. Емельянов Г.В., Скитович В.П., Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Изд.Ленинградского университета, 1967.
7. Жаңбырбаев Б.С. Ықтималдықтар теориясы және мат.статистика элементтері. Оқу құралы.-Алматы.:1988.
8. Кәкімов Ә. Ықтималдықтар теориясы. Оқу құралы.-Алматы.:1996.
9. Қазешов А.К. Ықтималдықтар теориясы бойынша есептер шығару. Оқу құралы.-Алматы.:1991.
10. Қазешов А.,Әбенов М., Қойлышов Ұ. Ықтималдықтар теориясы және мат.статистика бойынша есептер жинағы. Оқу құралы.-Алматы.:1999.
11. Лозинский С.Н. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике,-М.:Статистика, 1967.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения.-М.:Мир, 1964.
13. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей.-М.:Наука,1978.